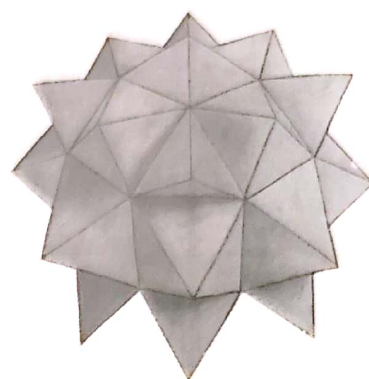
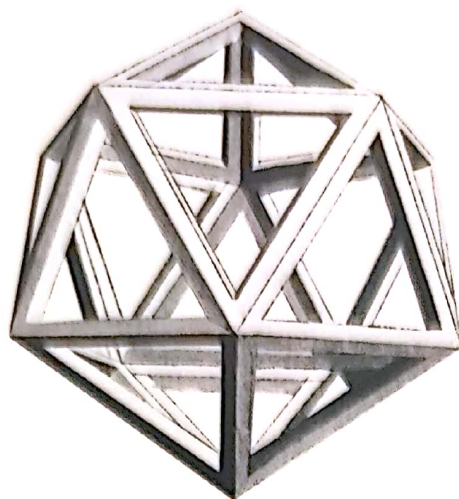
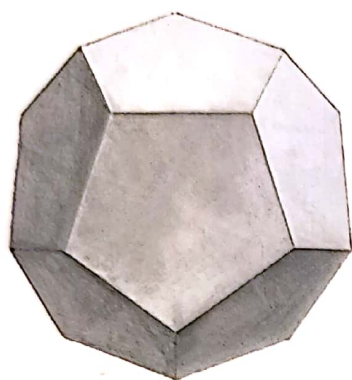


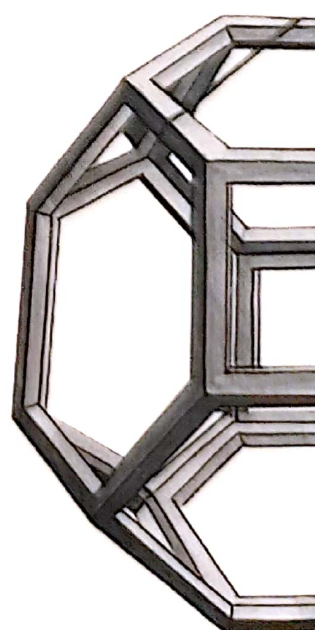
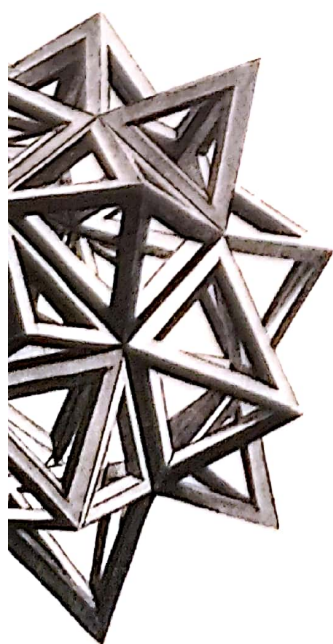


PIERGIORGIO ODIFREDDI

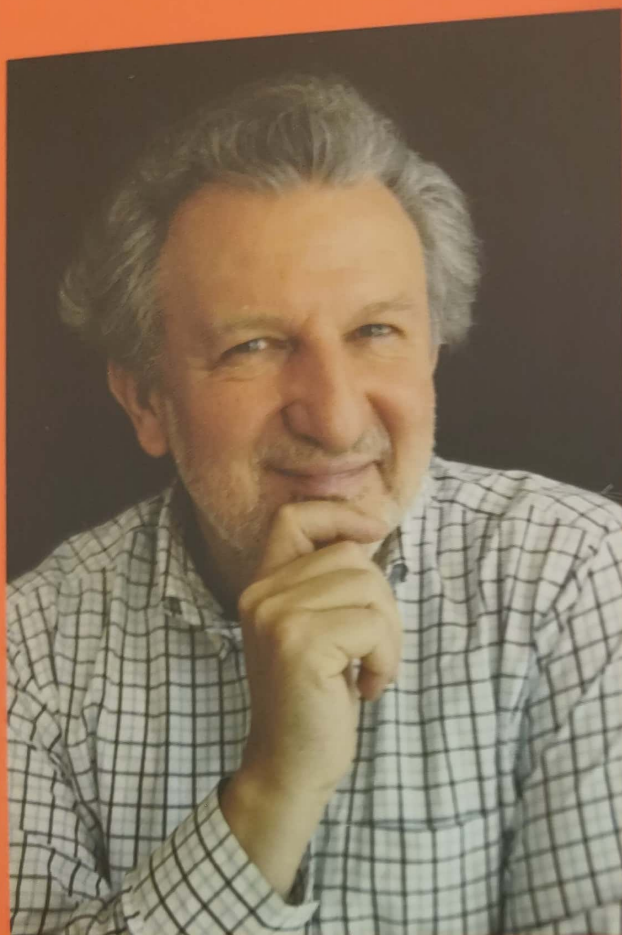
ȘTIINȚĂ

PILULE MATEMATICE

NUMERELE
ÎNTRE UMANISM ȘI ȘTIINȚĂ



HUMANITAS



Mărturisesc fără rușine că, înainte să-mi propun să uimesc cititorul, am fost uimit eu însumi, odată intrat în haina doctorului. Într-adevăr, nu bănuiam la început că matematica are un rol capilar și ubicuu în ambele culturi, mai ales în cea umanistă. La început observasem doar câteva apariții izolate în locuri neașteptate. Ca pe urmă să dea năvală peste mine exemple în cascadă, stimulate și de faptul că, din aprilie 2004, pentru aproape douăzeci de ani, am ținut o rubrică în mensualul *Le Scienze*. Așa că, mai mult decât despre o pilulă pe zi, pentru mine era vorba despre a fabrica o pilulă lunară de administrat cititorilor pacienți sau pacienților cititori.

—PIERGIORGIO ODIFREDDI

Piergiorgio Odifreddi (n. 1950) este un matematician și logician italian. După studii în Italia, iar apoi în Statele Unite, a predat la Universitatea din Torino și la Universitatea Cornell. Domeniul său principal de cercetare este teoria computabilității, o ramură a logicii matematice care studiază clasa funcțiilor care pot fi calculate automat. Este autorul a numeroase articole și cărți de popularizare a științei.

PIERGIORGIO ODIFREDDI

PILULE MATEMATICE

NUMERELE
ÎNTRE UMANISM ȘI ȘTIINȚĂ

Traducere din italiană
de Liviu Ornea

HUMANITAS

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corector: Marilena Brînzan
DTP: Iuliana Constantinescu, Dan Dulgheru

Tipărit la Livco Design

Piergiorgio Odifreddi
Pillole matematiche. I numeri tra umanesimo e scienza
© 2022 Raffaello Cortina Editore

© HUMANITAS, 2024, pentru prezenta versiune în limba română

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Odifreddi, Piergiorgio
Pilule matematice: numerele între umanism și știință /
Piergiorgio Odifreddi; trad. din italiană de Liviu Ornea. –
București : Humanitas, 2024
ISBN 978-973-50-8607-7
I. Ornea, Liviu (trad.)
51

EDITURA HUMANITAS
Piața Presei Libere 1, 013701 București, România
tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro
Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro
Comenzi telefonice: 0723 684 194

CUPRINS

Prefață	
Aurind pilula popularizării.....	11

UMANIOARE

Popularizare	17
Statul de vorbă. <i>Dialogurile lui Platon</i>	17
Scrisul. <i>Scrisorile lui Arhimede</i>	20
Haz de necaz. <i>Satira lui Swift</i>	23
Povești. <i>Fanteziile lui Abbott și Hinton</i>	26
Jocuri. <i>Rubricile lui Gardner</i>	30
Răsfoind benzi desenate. <i>Desenele animate ale lui Disney</i>	33
La cinema. <i>Filmele lui Damon și Crowe</i>	36
La televizor. <i>Serialul lui Sheldon</i>	40
Postări pe Youtube. <i>Clipurile lui Launey</i>	42
Chat în rețea. <i>Blogurile lui Gowers și Tao</i>	45
Povestire	48
Doi și cu doi fac cinci. <i>Dostoievski</i>	48
Principiul Annei Karenina. <i>Tolstoi</i>	50
Calculele Columbiei. <i>Verne</i>	53
Duel la distanță. <i>Joyce și Borges</i>	55
Numerele lui Iosif și ale fraților săi. <i>Mann</i>	58
O necunoscută literară. <i>Broch</i>	61

Fundamentele literaturii. <i>Queneau</i>	63
Matematica în Macondo. <i>García Márquez</i>	66
Aur adevărat și fals. <i>Dan Brown</i>	68
Reprezentare.....	72
Muzică irațională. <i>Temperamentul lui Archytas</i>	72
Lumea așa cum o vedem. <i>Perspectiva lui Giotto</i>	74
Proporția divină. <i>Desenele lui Leonardo</i>	78
Școala din Atena. <i>Camerele lui Rafael</i>	82
Jocuri de oglinzi. <i>Un truc al lui Manet</i>	86
Concert matematic. <i>Cântecele lui Lehrer</i>	90
Cum ieșim de-aici? <i>Labirintul lui Kubrick</i>	92
Un Nobel de Oscar. <i>Găurile negre ale lui Thorne</i>	95
Mărturisesc că nu înțeleg. <i>Formula lui Andò</i>	98
Rădăcinile fotografiei. <i>Numerele diafragmei</i>	100
Joacă.....	104
Două jocuri și-o magie. <i>X și 0 și Scrabble</i>	104
Nu încapă nici o îndoială. <i>Origami</i>	107
Semnul celor cincisprezece. <i>Un puzzle al lui Loyd</i>	110
Sushi pentru creier. <i>Sudoku</i>	112
Doamna e cucerită. <i>Dame</i>	115
Șah la matematică. <i>Șah</i>	117
Un joc de autor. <i>Hex</i>	120
Strategii de război. <i>Go</i>	122
Marele joc. <i>Life</i>	125
Omagiu lui Conway. <i>Privește și spune</i>	128
Curiozitate	131
Omletă matematică. <i>Oologie</i>	131
Mașini cu plăcuțe geometrice. <i>Forma logourilor</i>	134
Șah la trafic. <i>Geometria taxiului</i>	136
Lanțul de la bicicletă. <i>Roți pătrate</i>	139

Dansul metronomului. <i>Pendulul lui Huygens</i>	142
Sfaturi pentru frizeri. <i>Teorema lui Brouwer</i>	145
Meandre fluviale. <i>Legea lui Hack</i>	148
Imperiul Soarelui Tangent. <i>Sangaku</i>	150
Ce ușă deschidem? <i>O problemă a lui Carroll</i>	153
Jeepuri în deșert. <i>O problemă a lui Alcuin</i>	156
A trăi și a muri	159
Gândurile serioase ale unui mistic. <i>Pascal</i>	159
Un orb vizionar. <i>Euler</i>	161
Îndoieli și certitudini. <i>Hilbert</i>	163
Fascinația analogiei. <i>Weil</i>	166
Semn distinctiv: cravata. <i>Villani</i>	169
Moartea unui matematician american. <i>Thurston</i>	171
Cel mai bun filozof-matematician. <i>Kreisel</i>	174
Rămas-bun unei minți strălucite. <i>Nash</i>	177
O iraniană pe podium. <i>Mirzakhani</i>	179
Micul om mare. <i>Atiyah</i>	182

ȘTIINȚĂ

Geografie	189
Calendare raționale. <i>Anul solar</i>	189
Povești postmeridiane. <i>Meridiane</i>	191
Cursă împotriva Soarelui. <i>Fuse orare</i>	194
A ține cursul. <i>Loxodrome</i>	198
Douăzeci și trei de grade și jumătate. <i>Axa terestră</i>	201
Călătorie spre centrul Pământului. <i>O problemă a lui Plutarh</i>	205
Verde: culoarea speranței. <i>Schimbări climatice</i>	208
Importanța originii. <i>Temperatura globală</i>	211
Creștere hiperbolică. <i>Populație</i>	213
Pe când sfârșitul? <i>Previziunea lui Gott</i>	216

Astronomie	219
Respectuos omagiu epicyclului. Sistemul ptolemeic	219
Tras de funie cosmic. Mișcarea Lunii	223
Big Bang-ul lui Galilei. Prima cosmologie.....	226
Azi, conicele. Traectorii și orbite.....	229
Cheia sistemului solar. Legile lui Kepler	232
Frivolități despre gravitație. Forțe gravitaționale	234
Atracții fatale. Teoria mareelor	237
Proiectul lui Von Braun. De la Pământ la Marte.....	239
Formule ecumenice. Entropia unei găuri negre	243
Numere cosmice. Entropia universului.....	245
Fizică.....	248
Epitaf pentru Stevin. Regula paralelogramului	248
Pendulul e greu. Constanta lui Galilei.....	251
Focuri de artificii. O problemă a lui Galilei	254
Puterea formulelor. Legile mișcării	257
Lenea cosmică. Principiul minimei acțiuni	259
Arta de a greși la calcule. Statistica lui Bose și Einstein	262
A pune bile în cutii. Statistici alternative	264
Călărind valul de-a-ndoaselea. Potențiale avansate	267
Fizicienii dau numere. Constante universale	270
Maxwell forever. Ecuațiile Yang-Mills	272
Chimie	276
Lucrețiu, poet și savant. Atomi.....	276
Chimia lui Platon. Cele patru elemente.....	278
Ceasuri geniale. Carbonul	282
Mingi și cupole. Fulerena.....	284
Nobil omagiu hexagonului. Benzenul.....	287
Afinități deductive. Hidrocarburi și carborani	290
Ecuația găurii. Ozon.....	293

Un Nobel aproape cristalin. <i>Cvasicristale</i>	295
Piese de coroană. <i>Virus</i>	299
Vaccinuri programate. <i>Antivirus</i>	302
Biologie	305
Formula evoluționismului. <i>Legea lui Hardy și Weinberg</i>	305
Baza selecției naturale. <i>Teorema lui Fischer</i>	307
<i>Drosophila</i> axiomatizată. <i>Genele lui Morgan</i>	310
Jocul vieții. <i>Codul genetic natural</i>	312
Criptobiologie. <i>Un cod genetic artificial</i>	315
Evaluarea metabolismului. <i>Legile lui Rubner, Bergmann și Allen</i>	317
Plimbări matematice. <i>Teorema lui Polya</i>	320
Pradă și prădători. <i>Ecuația lui Volterra</i>	323
Creșteți și exponențiați-vă. <i>Legea lui Verhulst</i>	326
Kamasutra matematicii. <i>Numere și sex</i>	330
Economie Politică	333
Te asigur că rentează. <i>Matematica actuarială</i>	333
Studiul epidemiilor. <i>Modelul lui Bernoulli</i>	336
O constituție sănătoasă și robustă. <i>Principiul lui Jefferson</i>	339
Calculul fericirii. <i>Utilitarismul lui Bentham</i>	342
Matematica prezidențială. <i>Metoda lui Hamilton</i>	345
Un partid bun. <i>Teoremele lui Arrow și Sen</i>	348
Matematica egalității. <i>Coeficientul lui Gini</i>	351
Două curbe frumoase. <i>Curba lui Laffer și vârful lui Hubbert</i>	354
Un rezultat care prinde. <i>Formula Black-Scholes</i>	357
Economia verde. <i>Formula lui Bill Gates</i>	360
Premii Nobel și Medalii Fields citate	363

AURIND PILULA POPULARIZĂRII

„O pilulă pe zi ține doctorul la distanță”, spune un vechi proverb. Evident, pilulele pe care le va găsi cititorul în acest flacon nu vor avea nici o influență asupra sănătății sale fizice, deși matematica are o mulțime de efecte directe și asupra medicinei, așadar și asupra stării de bine fizice a oamenilor. În schimb, aceste pilule matematice s-ar vrea un constituent preventiv pentru sănătatea mintală și starea de bine psihică, ambele puse la încercare serios de iraționalitate, în general, și de analfabetismul științific, în particular.

Mai toată lumea știe azi că civilizația tehnologică se bazează pe cunoașterea științifică și că științele vorbesc limba matematicii. Dar puțini sunt cei care cunosc și înțeleg această limbă și numeroasele dialecte în care e declinată în diferite științe. Jumătate din pilulele acestei cărți conțin deci exemple de aplicare a matematicii în geografie, astronomie, fizică, chimie, biologie și economie.

Pilulele din cealaltă jumătate, în schimb, au o sarcină mai neașteptată și surprinzătoare: să arate că și umanoarele folosesc matematica din plin, chiar dacă, adesea, umaniștii n-o știu și, la fel de adesea, nici nu-și dau seama. Mai mult, unii nici măcar nu bănuiesc că există aspecte matematice în literatură, pictură, muzică și chiar în jocuri! Neașteptându-se să le găsească, nici măcar nu le observă atunci când dau de ele.

Mărturisesc fără rușine că, înainte să-mi propun să uimesc cititorul, am fost uimit eu însumi, odată intrat în haina doctorului.

Într-adevăr, nu bănuiam la început că matematica are un rol capilar și ubicuu în ambele culturi, mai ales în cea umanistă. La început observasem doar câteva apariții izolate în locuri neașteptate. Ca pe urmă să dea năvală peste mine exemple în cascadă, stimulate și de faptul că, din aprilie 2004, pentru aproape douăzeci de ani, am ținut o rubrică în mensualul *Le Scienze*. Așa că, mai mult decât despre o pilulă pe zi, pentru mine era vorba despre a fabrica o pilulă lunară de administrat cititorilor pacienți* sau pacienților cititori.

În urma acelei experiențe, am compilat în cartea de față un rețetar cu 120 de pilule de matematică aplicată, organizate sistematic, subîmpărțite pe teme și ilustrate, exact așa cum ar proceda un medic care experimentează cu cazurile clinice ale celor mai interesanți pacienți întâlniți de-a lungul carierei sale profesionale. Un rețetar analog, care furnizează terapii alternative bazate pe matematica pură, așteaptă o ocazie viitoare, de preferință nu postumă.

Deocamdată, cititorul poate porni tratamentul preventiv cu matematica aplicată. În ce mă privește, am făcut ce mi-a stat în puteri ca să îndulcesc pilula, urmând mottoul lui Lucrețiu din *De rerum natura*:

Și tot așa cum medicii, când cearcă
Să dea absintul cel greșos copiilor,
Ung înainte buzele paharului
Cu-a mierii dulci licoare aurie,
Pentru ca ei, nebăgători de seamă
Și de dulceață amăgiți, să-nghită
Până la fund amara băătură,
Și înșelați fiind, nu prinși în cursă,
Ei mai curând să se-ntremeze iară,
Așa și eu acum, fiindc-această
Învățătură li se pare-amară

* Aici, în sens de „răbdători“ (n. tr.).

Acelor care n-o cunosc și vulgul
Întoarce capul de la ea cu groază,
Și eu am vrut să ți-o dezvălui ție
În graiul dulce-al Muzelor și, astfel,
S-o îndulcesc cu mierea poeziei.
Doar oi putea să mi te țin pe tine
Sub vraja dulce-a versurilor mele,
În timp ce însuți vei pătrunde firea
Și vei vedea ce-alcătuire are.*

UN ÎNTOARCE

* Lucrețiu, *Poemul naturii*, trad. de T. Naum, Editura Științifică, București, 1965 (n. tr.).

UMANIOARE

POPULARIZARE

STATUL DE VORBĂ

Dialogurile lui Platon

A populariza înseamnă a aduce la cunoștința poporului, înțeles în sensul nobil al unei populații generice, un gând care aparține unui individ sau unui anume grup. În sens mai larg, întreg limbajul e popularizare, deoarece ne permite să comunicăm celorlalți propriile gânduri, ieșind astfel din solipsism și din egocentrism. Interpretată în manieră mai restrânsă, popularizarea exteriorizează, în schimb, o achiziție sau o cunoaștere care altminteri ar rămâne apanajul unei coterii ezoterice.

Primii care, în civilizația occidentală, și-au pus problema popularizării au fost pitagoreicii, care și-au desfășurat activitatea intelectuală în două arii complementare. Pe de o parte, au pus la punct tehnici specifice pentru ca ucenicii lor, pe care-i numeau *matematici* (de la cuvântul grec *mathesis*), să învețe meseria. Pe de altă parte, și-au popularizat ideile generale acelor ascultători care voiau doar să audă, să afle despre ce-i vorba – pe aceștia numindu-i *acusmatici*, de la cuvântul grec *akoustiké*).

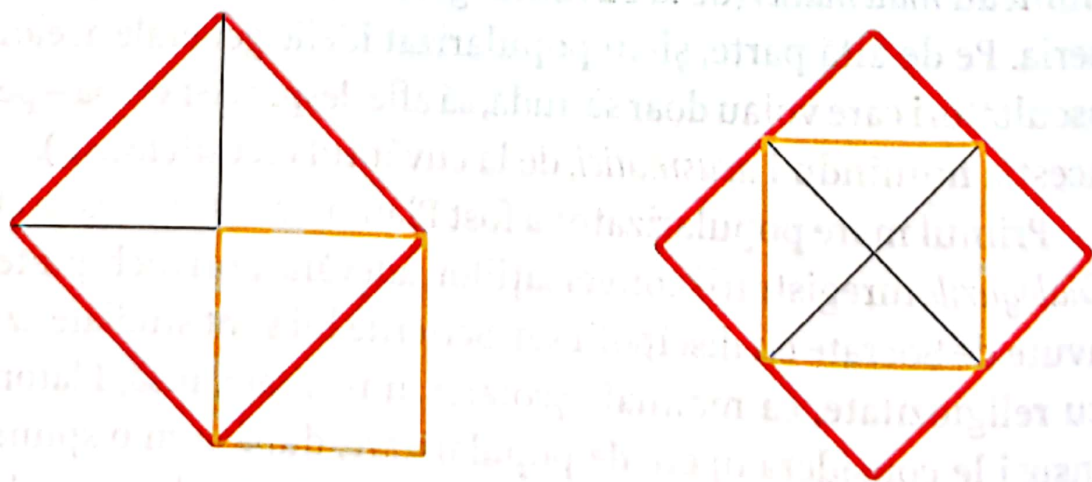
Primul mare popularizator a fost Platon, care și-a consacrat *Dialogurile* înregistrării conversațiilor, adevărate ori închipuite, avute de Socrate cu discipolii săi. Scrierile lui sunt studiate azi cu religiozitate, ca manuale școlare: în realitate, însă, Platon însuși le considera opere de popularizare, după cum o spune explicit în *Scrisoarea a șaptea*: „Asupra adevăratelor doctrine ale

școlii mele nu există și nici nu va exista nimic scris, pentru că ele nu pot fi comunicate prin cuvinte, fiind perceptibile numai în urma unei iluminări.”

Abordarea maieutică și interactivă din *Dialoguri*, bazată pe un schimb intens de întrebări și răspunsuri între profesor și elev, e foarte potrivită pentru scoaterea la lumină a genezei ideilor, operație care, de obicei, urmează un traseu lung și sinuos, printre încercări și eșecuri. În matematică totuși, începând cu *Elementele* lui Euclid, s-a impus moda contrară: se prezintă produsul finit prin intermediul unei reconstrucții raționale *a posteriori* care tinde să semene mai degrabă cu o scamatorie decât cu un parcurs intelectual.

Matematica nu era însă defel exclusă din *Dialogurile* platoniciene: o dovedește un pasaj celebru din *Menon*, în care Socrate conduce pas cu pas un sclav către soluția duplicării pătratului (cazul particular al teoremei lui Pitagora pentru triunghiuri dreptunghice isoscele), în ceea ce constituie prima mărturie istorică a unei veritabile demonstrații. E sigur că, dacă și azi s-ar prezenta astfel teoremele, matematica nu li s-ar mai părea elevilor și nespecialiștilor atât de rebarbativă.

Ulterior, și alți filozofi au adoptat popularizarea colocvială inaugurată de Platon: de la pierdutele dialoguri ale lui Aristotel, care încă circulau în primul secol al erei noastre, până la *Dialoguri asupra religiei naturale* (1779) a lui David Hume, în care se



Duplicarea pătratului în *Menon* al lui Platon

înfruntă un raționalist, un empirist și un sceptic. Dar exemplele cele mai relevante din punct de vedere istoric și științific sunt cu siguranță cele două faimoase opere ale lui Galileo Galilei: *Dialog despre cele două sisteme principale ale lumii* (1632)* și *Discursuri și demonstrații matematice în jurul a două noi științe* (1638).

Ambele cărți pun în scenă conversații între un aristotelician-ptolemeic (Simplicius), un copernican-galileian (Salviati) și un moderator (Sagredo), care în prima carte discută despre astronomie, iar în a doua despre mecanică și știința materialelor. Dacă *Discursurile* conțin legatul științific al lui Galilei și expun descoperirile făcute de el de-a lungul întregii sale cariere, *Dialogul* constituie maximumul pe care-l poate atinge o carte de popularizare: nu doar pentru stilul autorului, pe care Italo



Pagina de gardă a *Dialogului* lui Galilei

* Editura Științifică, București, 1962 (n. tr.).

Calvino ajungea să-l considere „cel mai mare scriitor italian“, dar și pentru consecințele spectaculoase pe care le-a avut în teologie, filozofie, științe sociale și politice.

Moștenitorul modern al lui Platon și Galilei este matematicianul francez Alain Connes, medaliat Fields în 1982, care și-a ridicat glasul deasupra flecărelii mediatică, izbutind îndrăzneța întreprindere de a crea o punte de comunicare între cercetarea de specialitate și publicul larg. În dialogul *Matière à pensée* (Odile Jacob, Paris, 1989) Connes stă de vorbă cu biologul Jean-Pierre Changeux despre problema raporturilor dintre creier și spirit. Iar în *Triangle de pensées* (Odile Jacob, Paris, 2000), împreună cu matematicianul André Lichnerowicz și psihiatrul-informatician Marcel Schützenberger, discută marile idei matematice și științifice ale secolului XX, producând un foarte frumos exemplu de popularizare de nivel înalt, cea capabilă să simplifice fără să banalizeze și să illustreze fără să deformeze.

SCRISUL

Scrisorile lui Arhimede

Arhimede, cel mai mare matematician al Antichității, a trăit în Siracusa (Sicilia), pe timpul lui Heron II și al fiului său, Gelon II.

Pentru primul din ei, care a domnit peste cincizeci de ani, Arhimede a inventat oglinzile concave și încă alte mașini de război mitice care i-au uluit pe romani. A descoperit cu un *Eureka!* faimosul *principiu* care-i poartă numele, pe care l-a folosit ca să verifice puritatea unei coroane de aur scufundând-o în apă. A construit și cea mai mare navă din lume, cuirasatul *Siracusa*, oferită în dar faraonului Egiptului, care a rebotezat-o *Alexandria*.

Celui de-al doilea, care probabil a urcat pe tron alături de tatăl său în ultima parte a domniei sale, i-a fost preceptor. Ilustrului său elev, de altfel, i-a dedicat prima sa operă de popularizare

epistolară din istorie, adresându-i o scrisoare intitulată *Calculul firelor de nisip* (*Arenarius*) în care amesteca matematică și astronomie într-o încercare reușită de a ilustra numerele mari care se pot deduce din observarea naturii:

Sunt unii, rege Gelon, care cred că numărul firelor de nisip este infinit, și eu înțeleg prin nisip nu numai cel existent în Siracuză și în restul Siciliei, dar și cel care se găsește în orice regiune locuită sau nelocuită.

Alții cred că numărul firelor de nisip este finit, dar că nu poate fi exprimat un număr mai mare decât acesta. Sau, în orice caz, nu poate fi exprimat un număr mai mare decât cel al firelor de nisip necesare pentru a umple toate cavitățile și toate mările și a ajunge până la vârfurile tuturor munților.

Eu însă voi arăta că, printre numerele pe care le-am desemnat într-o lucrare trimisă lui Zeuxippos, unele depășesc nu doar numărul firelor de nisip care ar umple întreg Pământul, dar și pe cel al firelor de nisip care ar umple întreg universul.

Pentru a calcula numărul firelor de nisip care ar umple universul, Arhimede face raportul dintre volumul universului și volumul unui fir de nisip. Și-l reduce, folosind formula volumului sferei chiar de el găsită, la cubul raportului dintre raza universului și raza unui fir (grăunte) de nisip.

Evident, problema e să evaluezi cele două raze, pe prima mai cu seamă. Iar partea interesantă nu e atât rezultatul, care azi ne apare mult subestimat, cât metoda. Arhimede se bazează pe teoria heliocentrică a lui Aristarh¹, despre care singura mărturie istorică rămasă este chiar în acest *Arenarius*:

Ipotezele lui Aristarh sunt că stelele fixe și Soarele nu se mișcă. Că Pământul se rotește în jurul Soarelui pe un cerc care are Soarele în centru. Și că sfera stelelor fixe, și ea având

1. Vezi secțiunea „Respectuos omagiu epiciclului“ (notele cu cifră aparțin autorului).

în centru Soarele, e atât de mare, încât raportul dintre ea și orbita terestră e egal cu raportul dintre orbita terestră și sfera terestră.

Conform datelor moderne, diametrul mediu al unui fir de nisip este de circa o zecime de milimetru, raza medie terestră este 6.370 de kilometri, iar distanța medie dintre Pământ și Soare este 150 de milioane de kilometri. Proporția lui Aristarh ar situa deci sfera stelelor fixe la circa patru luni-lumină de Pământ, iar calculul lui Arhimede ar furniza aproximativ 10^{58} fire de nisip. În schimb, cu datele avute la dispoziție, Arhimede a găsit că stelele fixe s-ar afla la circa doi ani-lumină de Pământ, în timp ce numărul firelor de nisip ar fi 10^{63} . Ceea ce-l face să încheie, declarându-se satisfăcut nu doar ca om de știință, ci mai ales ca principal popularizator epistolar:

Îmi închipui, o, rege Gelon, că aceste lucruri le apar de necrezut majorității celor care nu au studiat matematica. Îi vor convinge însă pe aceia care o cunosc și au reflectat la probleme cum sunt distanțele și măsurile Pământului, ale Lunii, ale Soarelui și ale întregului univers. Tocmai din acest motiv am crezut că n-ar fi nepotrivit să supun atenției unui rege acest subiect.

Arhimede a scris și alte scrisori, printre care una în versuri în care îl provoca pe colegul său Eratostene să calculeze numărul de cirezi ale Soarelui care, conform tradiției homerice, pășteau în Sicilia. De-atunci încolo, mulți matematicieni au continuat să converseze prin scrisori: Tartaglia și Cardano despre ecuația de gradul al treilea (1539–1548)¹, Pascal și Fermat despre teoria probabilităților (1654)², Newton și Leibniz despre

1. Fabio Toscano, *La formula segreta. Tartaglia, Cardano e il duello matematico che infiammo l'Italia del Rinascimento*, Sironi, 2009.

2. Keith Devlin, *La lettera di Pascal*, Rizzoli, 2008.

calculul infinitezimal (1676)¹, De Morgan și Ada Lovelace despre algebră și analiză (1840–1842)², Cantor și Dedekind despre teoria mulțimilor (1872–1873)³, Russell și Frege despre logică (1902–1904)⁴ etc., etc. Continuă și astăzi corespondențele matematice, la foc continuu, chiar dacă nu prin scrisori, devenite de-acum obiecte de muzeu, ci pe suporturi noi și cu altfel de poștași.⁵

HAZ DE NECAZ

Satira lui Swift

La cumpăna dintre 1726 și 1727 au loc în Anglia două evenimente memorabile a căror amintire a rămas vie până azi: în octombrie se publică *Călătoriile lui Gulliver* a lui Swift, iar în martie moare Isaac Newton. Romanul a intrat în istorie ca o nemiloasă satiră dublă: pe de o parte, a formei literaturii de călătorie, pe de altă parte, a substanței societății engleze. Cât despre savant, el a intrat în istorie ca părinte fondator al științei moderne și inspirator al tehnologiei derivate din ea.

Dar satira lui Swift nu cruță nici știința newtoniană: dimpotrivă, ea devine ținta celei de-a treia călătorii a lui Gulliver, în insula zburătoare Laputa și în regatul terestru de sub ea, Balnibarbi. Locuitorii lor sunt veșnic adânciți în reflecții abstracte și uită de viața concretă, cultivă doar matematica, astronomia și

1. Gianfranco Cantelli, *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Bollati Boringhieri, 2006.

2. Christopher Hollings, Ursula Martin e Adrian Rice, *Ada Lovelace. The making of a computer scientist*, Bodleian Library, 2018.

3. Georg Cantor și Richard Dedekind, *Lettere 1872–1899*, Pristem Storia n. 6, Springer, 2002.

4. Gottlob Frege, *Alle origini della nuova logica. Epistolario scientifico*, Bollati Boringhieri, 2020.

5. Vezi secțiunea „Chat în rețea“.

muzica, îmbracă haine pe care sunt desenate corpuri cerești sau instrumente muzicale, mâncarea lor are formă de corpuri geometrice, reprezintă corpurile în manieră cubistă și nu sunt preocupați decât de posibile cataclisme cosmice, de sosirea cometelor și de fluctuațiile solare.

La rândul ei, marea Academie cu sediul în capitala Lagado e o parodie a Royal Society din Londra, fondată de regele Carol II în 1660 și prezidată chiar de Newton timp de un sfert de secol, din 1703 până la moartea sa. Academicienii din roman se consacră cu toții unor experimente ridicole demne de Premiul Ig Nobel, cum ar fi extragerea energiei solare din castraveți, sau a hranei din excremente umane. Cât despre specialiștii în științe politice, ei sunt prezentați ca fiind complet nebuni, pentru că pretind că-i conving pe guvernanți să acționeze cu înțelepciune, competență și moralitate.

Swift nu era însă chiar neștiutor în ale științei și voia să facă popularizare într-un mod amuzant, după cum se vede din anumite indicii presărate inteligent printre aventurile povestite. În Lilliput, de pildă, unde dimensiunile liniare ale lui Gulliver sunt de 12 ori mai mari decât ale locuitorilor, matematicienii locali calculează că el ar trebui să mănânce cât 1.724 de lilliputani: e clar că Swift cunoștea principiul asemănării, potrivit căruia raportul volumelor e cubul raportului dimensiunilor liniare (cubul lui 12 e totuși 1728, iar nu 1724 cum stă scris în roman, din greșeală sau în glumă).

Că Swift cunoștea și legea a treia a lui Kepler¹ vedem din acest surprinzător fragment despre progresele astronomice ale liliputanilor:

Ei au descoperit de asemenea două stele mai mici sau sateliți care se învârtesc în jurul lui Marte. Cel mai apropiat se află la o distanță egală cu trei diametre ale lui Marte de centrul

1. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar“.

planetei principale, iar cel mai depărtat, la o distanță de cinci diametre. Primul satelit are o mișcare de rotație de zece ore, iar al doilea de douăzeci și una de ore și jumătate. Astfel, pătratele epocilor lor periodice cresc aproximativ în aceeași proporție cu cuburile distanțelor de la centrul lui Marte, ceea ce dovedește, indiscutabil, că ele sunt guvernate de aceeași lege a gravitației care influențează celelalte corpuri cerești.*

Pe vremea lui Swift erau cunoscuți un satelit al Pământului, nici unul al lui Marte, 4 ai lui Jupiter și 5 ai lui Saturn: presupunând că ar fi existat vreo proporție numerică, s-ar fi putut presupune că Marte ar avea 2 sau 3 sateliți necunoscuți, cu perioade de rotație și distanțe legate între ele prin legea lui Kepler. Cum acești posibili sateliți încă nu fuseseră observați, ei trebuie să fi fost foarte mici și apropiați de planetă: ipoteza lui Swift era rațională, folosea numere cu care e ușor de verificat legea a treia a lui Kepler și, culmea!, a funcționat.

Un secol și jumătate mai târziu, pe 12 și 18 august 1877, astronomul Asaph Hall chiar a descoperit doi sateliți ai lui Marte pe care i-a botezat Deimos (Teroare) și Phobos (Frică), în onoarea celor doi copii ai omonimei divinități greco-romane. Surprinzător, cel mai apropiat din cei doi sateliți se află la 1,4 diametre de centrul planetei și se rotește în aproape 8 ore, în timp ce al doilea se află la 3,5 diametre și se rotește în puțin mai mult de 30 de ore, potrivindu-se destul de bine cu pariul lui Swift, care sfida totuși norma sateliților cunoscuți pe vremea lui: Luna, de exemplu, se află la 30 de diametre terestre și se rotește în 28 de zile.

Sunt multe alte aspecte științifice în romanul lui Swift: de la ceasul de buzunar al lui Gulliver, crezut de lilliputani zeu, pe care el îl consultă întruna, până la o mașină combinatorie

* Jonathan Swift, *Călătoriile lui Gulliver*, trad. Leon Levițchi, B.P.T., Minerva, București, 1964 (n. tr.).

care generează automat cuvinte și propoziții, inspirată de roata lui Llull* și de calculatorul lui Leibniz. Ca să nu mai spunem despre Yahoo care, în roman, indica o rasă degenerată de oameni ținută în sclavie de înțelepții cai vorbitori Houyhnhnm, ajuns azi numele unui motor de căutare: cine are urechi de auzit să audă.

POVEȘTI

Fanteziile lui Abbott și Hinton

Se poate face popularizarea matematicii spunând povești. Au făcut-o reverenzii Jonathan Swift și Lewis Carroll în *Călătoriile lui Gulliver* (1726) și în *Alice în țara minunilor* (1865)¹, supunându-și propriile personaje la micșorări și creșteri: adică la transformări de scală tipice geometriei afine. A făcut-o și abatele Edwin Abbott în *Flatland* (1882)², imaginând lumi cu o dimensiune în plus sau în minus față de obișnuitele trei, așa cum se face în geometria multidimensională.

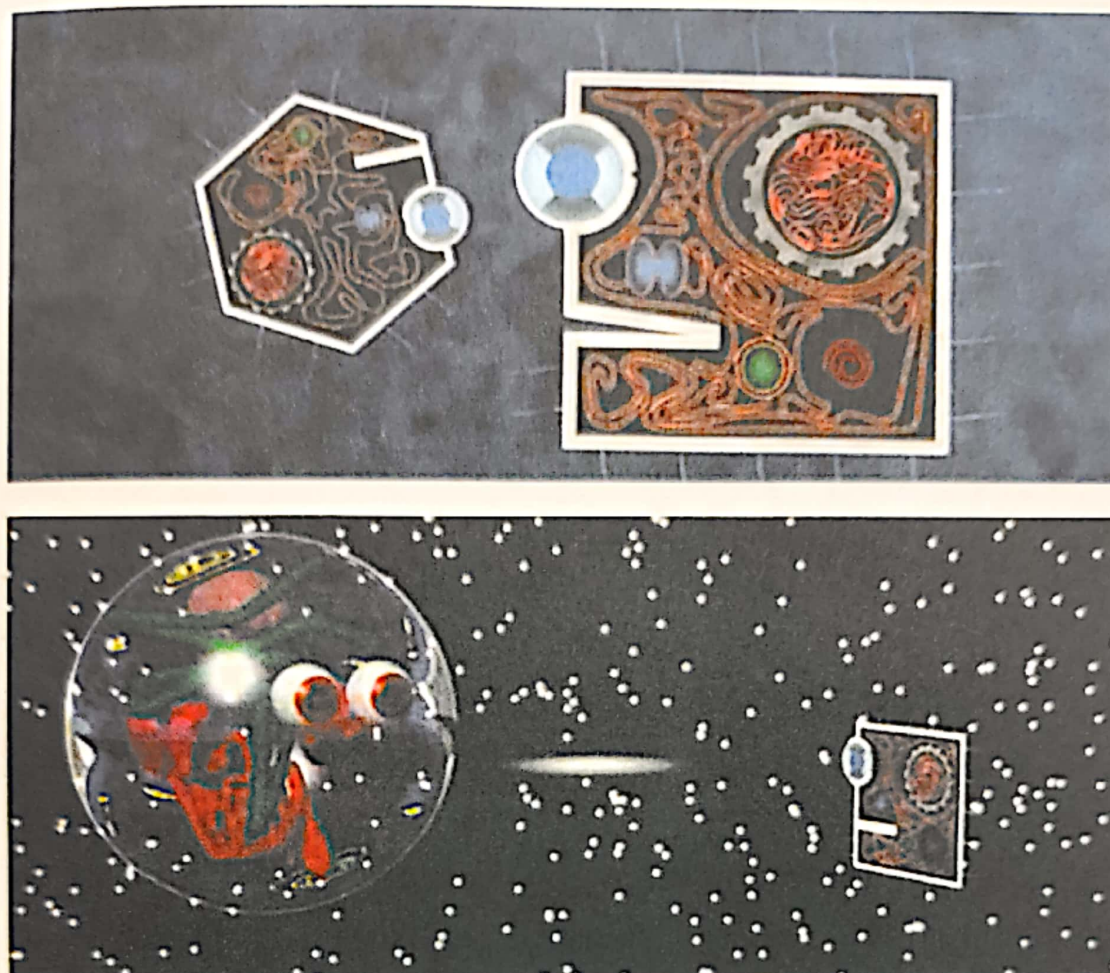
Diferența dintre aceste opere constă în rolul pe care-l joacă matematica: marginal în primele două, central în a treia. Într-adevăr, Abbott își alege personajele dintre figurile geometrice și le organizează într-o ierarhie care merge de la infima liniaritate a femeilor până la sublima circularitate a clerului, trecând prin poligonalitatea crescătoare a proletariatului și aristocrației, într-o batjocură metaforică a societății victoriene.

Dar adevăratul său scop e acela de a avertiza cititorul asupra faptului că, așa cum locuitorii lumii cu două dimensiuni

* Ramon Llull (Raimondo Lullo), 1232–1316, filozof, teolog, scriitor etc. (n. tr.).

1. Vezi secțiunea „Călătorie spre centrul Pământului“.

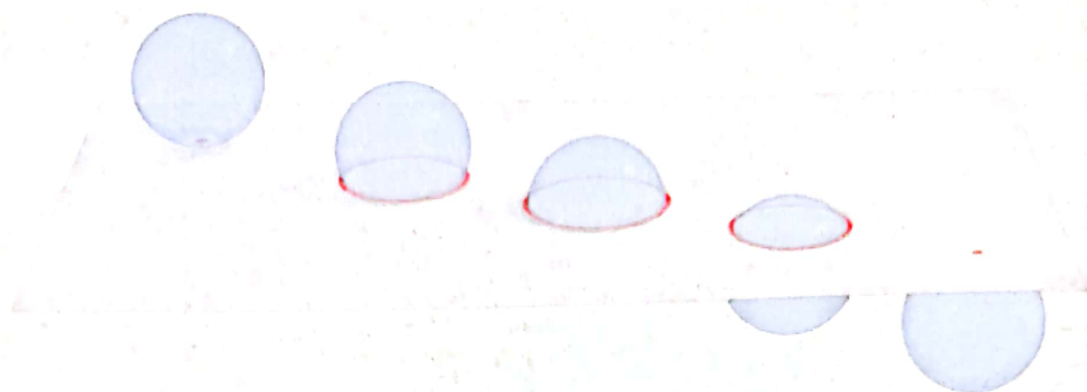
2. E. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, Seeley & Co., Londra, 1884.



Imagini din filmul *Flatland* (2007), de Jeffrey Travis

pot intui câte ceva din lumea noastră cu trei dimensiuni, la fel putem intui și noi ceva dintr-o lume cu patru dimensiuni. De exemplu, ființele bidimensionale din *Flatland*, ca Pătratul, protagonistul romanului, pot intui ceva despre o Sferă tridimensională prin mijlocirea urmelor circulare lăsate de aceasta în timp ce traversează Lumea Plată.

Urmele pornesc de la un punct în momentul de tangență inițial, cresc până la un maximum în momentul în care planul taie sfera de-a lungul ecuatorului, apoi descresc din nou până ajung iar un punct în momentul de tangență final. În mod asemănător, și noi putem intui ceva despre un analog patru-dimensional al Sferei privind urmele sferice similare pe care le va lăsa în timp ce traversează spațiul nostru tridimensional.



Urme circulare ale unei sfere care traversează un plan.

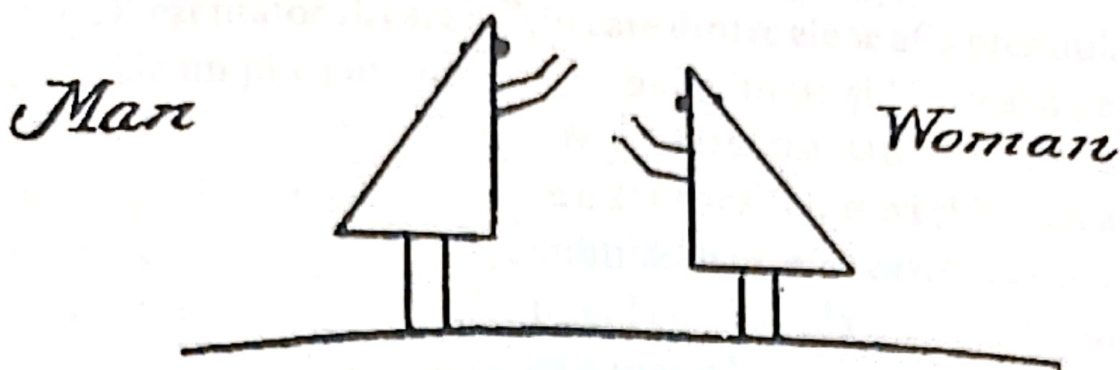
Aceeași idee i-a venit chiar în anii aceia și matematicianului Charles Hinton, care-a dezvoltat-o în *O lume plată*, una dintre povestirile sale științifice.¹ Observația sa a fost că, în *Flatland*, Abbott nu-și pusese următoarea problemă: cum ar fi cu adevărat o lume fizică asemenea aleii noastre, dar cu numai două dimensiuni. În particular, legea gravitației universale a lui Newton² ar trebui reformulată așa încât corpurile să se atragă invers proporțional cu distanța, nu cu pătratul ei.

Cu o asemenea lege a gravitației, în Lumea Plată, o planetă n-ar gravita în jurul unei stele pe o orbită eliptică stabilă. Singura orbită închisă posibilă ar fi circulară, dar, în mod obișnuit, orbitele ar fi deschise, chiar dacă în interiorul unei coroane situate în jurul stelei: problema mișcării a două corpuri ar fi, în general, imposibil de rezolvat precis, la fel ca în cazul problemei celor trei corpuri în lumea tridimensională.

Teoria relativității generale a lui Einstein n-ar fi o generalizare a celei a lui Newton, pentru că nu ar prevedea nici o forță de atracție exterioară corpurilor izolate. În două dimensiuni, tensorii energiei și curburii au, într-adevăr, același număr de

1. Charles Howard Hinton, *Scientific Romances*, o serie de nouă cărți publicate de Swan Sonnenschein & Co., Londra, între 1884–1886.

2. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar“.



Ilustrație din *Un episod din Flatland*

componente (șase) și, dacă unul din ei e zero, și celălalt se anulează: altfel spus, unde nu e materie, nu e nici gravitație.

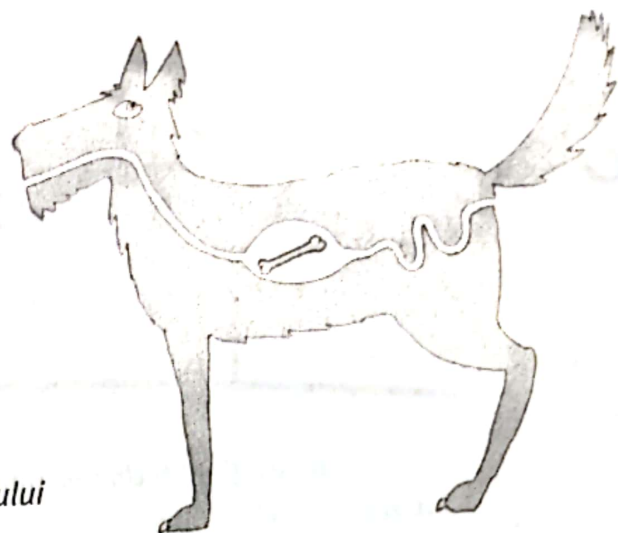
În povestirea lui și în romanul care i-a urmat, *Un episod din Flatland*¹, Hinton s-a concentrat pe fizica unei planete circulare din Lumea Plată, pe marginea căreia alunecă locuitori în formă de triunghiuri dreptunghice orientate în sens orar sau antiorar, conform sexului: ceea ce face să fie complicate și periculoase relațiile dintre indivizi de același sex, dar ușoare și neproblematic relațiile dintre indivizi de sexe diferite. Ca să dea viață interacțiunilor lor și ca să evite să-i condamne pe locuitori să se scurgă numai pe suprafața planetei, Hinton își imaginează că aceștia pot coborî în adâncul propriei planete, de unde pot să urce din nou la suprafață.

Mai recent, în *Planiversul*², Dewdney a studiat nu doar fizica Lumii Plate³, ci și chimia și biologia sa. Tabelul periodic al lui Mendeleev se înjumătățește la trecerea la două dimensiuni, pentru că trebuie excluse coloanele în care atomii au orbite orientate în trei dimensiuni: în particular, supraviețuiesc versiunile plane ale hidrogenului, carbonului și oxigenului, dar

1. Charles Howard Hinton, *An episode of Flatland: or, How a Plane Folk Discovered the Third Dimension*, Swan Sonnenschein & Co, Londra, 1907.

2. A. K. Dewdney, *The Planiverse: Computer Contact with a Two-Dimensional World*, Simon & Schuster, 1984.

3. Vezi secțiunea „Atracții fatale“.



Imagine din *Scurtă istorie a timpului* (1988), de Stephen Hawking

azotul și fierul dispar. Iar grupurile cristalografice se reduc de la 230 la 17.

Cât despre ființele vii, dacă ele ar avea un canal prin care, pe la un capăt să intre hrana, și pe la celălalt capăt să iasă, atunci s-ar descompune în două părți disconexe. Altfel spus, în lumea plată nu pot exista animale cu aparat digestiv complet și nu există oameni care să-și imagineze o a treia dimensiune.

JOCURI

Rubricile lui Gardner

Chiar dacă multora le pare un lucru bizar, matematica e adesea amuzantă și ludică: mai cu seamă când ascunde întrebări serioase îndărătul unei vesele măști de enigme, ghicitori și jocuri. Ceea ce știa bine Lewis Carroll care, în *Problemele pernei* (1895)¹, carte dedicată insomniacilor, a propus o mulțime de probleme de acest fel: în particular, o versiune a jocului TV în care un prezentator îl roagă pe un concurent să aleagă un plic-premiu.

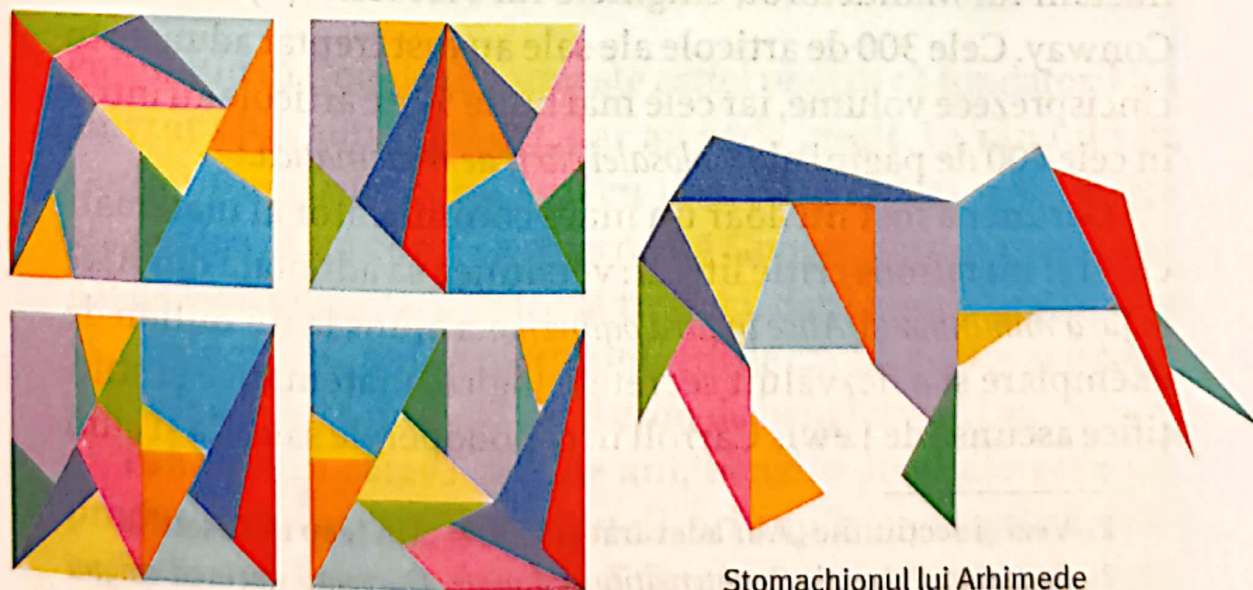
Să presupunem că sunt trei plicuri, dintre care două goale și unul cu un premiu de un milion de euro. Concurentul alege

1. Dodgson, Charles L., M.A. *Pillow-Problems: Thought Out During Wakeful Hours*. New York: Dover, 1958.

unul. Prezantatorul, care știe în care dintre ele se află premiul, deschide un plic gol dintre cele două rămase și-l întreabă pe concurent ce preferă: să-și mențină alegerea, sau să facă una nouă. Probabilitatea să câștige e $\frac{2}{3}$ dacă schimbă și $\frac{1}{3}$ dacă nu schimbă, dar motivația e subtilă: în primul caz, concurentul pierde numai dacă a ales plicul corect de la început, iar în al doilea câștigă numai în acea situație.¹

Matematica făcută în chip de joc e totuși o tradiție veche. Datează de cel puțin 3.500 de ani, când scribul egiptean Ahmes întreba, în *Papirusul Rhind*, despre câte lucruri e vorba în următoarea poveste: „Pe o proprietate sunt șapte case. Fiecare casă are șapte pisici. Fiecare pisică prinde șapte șoareci. Fiecare șoarece mănâncă șapte spice. Fiecare spic dă șapte măsurii de grâu.” Răspunsul e 19.607, și se obține adunând primele cinci produse consecutive ale lui 7 cu el însuși.

Nici marii matematicieni n-au disprețuit aspectul ludic al propriei discipline: Arhimede, de pildă, a inventat un extraordinar puzzle numit Stomachion, format din 14 piese care se pot combina într-un pătrat în nu mai puțin de 17.152 de moduri diferite.



Stomachionul lui Arhimede

1. Vezi și secțiunea „Ce ușă să deschidem“.

Probleme de acest tip găsim însă mai ales în lucrările de matematică recreativă, clasicele fiind *Probleme pentru ascuțit mintea tinerilor* (circa 800) de Alcuin din York¹, *Cartea abacului* (1202) a lui Fibonacci, *Despre puterea cantității* (1508) a lui Luca Pacioli, și *Probleme plăcute și desfătătoare* (1612) a lui Claude-Gaspard Bachet.

Apoi, începând cu secolul XIX, asistăm la o explozie de șarade și jocuri matematice, datorate mai ales invențiilor și lucrărilor de popularizare ale lui Lewis Carroll, Sam Loyd, Edouard Lucas, Walter Rouse Ball și Henry Dudeney. Subiectul se transformă de-acum într-o adevărată junglă, iar cea mai bună călăuză pentru explorarea ei este *Matematicianul se distrează* (2010)², care spune toată povestea, de la egipteni până în zilele noastre.

Adevăratul ambasador planetar al matematicii distractive a fost însă Martin Gardner care, între 1956 și 1981, a ținut în *Scientific American* legendara de-acum rubrică lunară „Jocuri matematice“, în care a reușit să combine cu mare succes amuzamentul pur cu popularizarea la nivel înalt. El a fost acela care a făcut cunoscute publicului larg o serie de subiecte stranie și incitante, cele mai adesea neincluse în cărțile și cursurile convenționale, printre care operele lui Escher, pavajele lui Penrose, fractalii lui Mandelbrot, enigmele lui Piet Hein și jocurile lui Conway. Cele 300 de articole ale sale au fost treptat adunate în cincisprezece volume, iar cele mai bune 50 de articole au intrat în cele 700 de pagini ale *Colosalei cărți de matematică*.³

Gardner a fost nu doar un mare comunicator al matematicii, ci și un faimos critic literar: versiunea sa adnotată din *Alice în țara minunilor* și *Alice în țara oglinzilor* a ajuns la un milion de exemplare și a dezvăluit secretele logice, matematice și științifice ascunse de Lewis Carroll în capodoperele sale. Ca și cum

1. Vezi și secțiunile „Aur adevărat și fals“ și „Un Jeep în deșert“.

2. Federico Peiretti, *Il matematico si diverte. Duecento storie ed enigmi che hanno fatto la storia della matematica*, Longanesi, 2010.

3. *The Colossal Book of Mathematics*, Norton & Company, 2004.

n-ar fi fost de ajuns, Gardner a fost și un cunoscut polemist: între 1983 și 2002 a ținut o altă rubrică celebră în *Skeptical Inquirer* (*Anchetatorul sceptic*), organ al Center for Inquiry (în Italia, organizația analogă e Comitetul Italian pentru Controlul Afirmățiilor Paranormale, fondat de Piero Angela și Tullio Regge). Evident, și această rubrică i-a furnizat material pentru o altă serie de cărți de succes.

Azi, rubrica lui Gardner din *Scientific American* e considerată precursora unei lungi descendențe: în 1981, a fost înlocuită cu „Teme metamagice” a lui Douglas Hofstadter¹, al cărei titlu în engleză era o anagramă a celui original („Mathematical Games”). În 1984, ștafeta a fost preluată de Alexander Dewdney, cu „Recreații matematice”.

O întreagă genealogie de comunicatori ai matematicii inspirați de Martin Gardner a călcat pe urmele maestrului, ținând rubrici similare în toată lumea, dovadă a fecundității și a interesului pentru abordarea ludică a matematicii.

RĂSFOIND BENZI DESENATE

Desenele animate ale lui Disney

Puțini știu că Google se numește astfel pentru că fondatorii lui au vrut să-i spună Googol, dar au scris greșit. La rândul său, Googol, numărul enorm egal cu 10 la puterea 100, se numește așa pentru că un copil i-a spus odată Google, care era un personaj de benzi desenate din anii treizeci, dar l-a scris greșit. Iată că, grație acestei duble erori, motorul de căutare cel mai folosit din lume poartă numele unui erou de benzi desenate.

Până acum câteva zeci de ani, benzile desenate erau un produs rezervat copiilor normali, ori adulților retardați. Filozofia lor se baza pe faptul că înțelegerea cuvântului scris

1. *Metamagical Themas*, Basic Books, 1985.

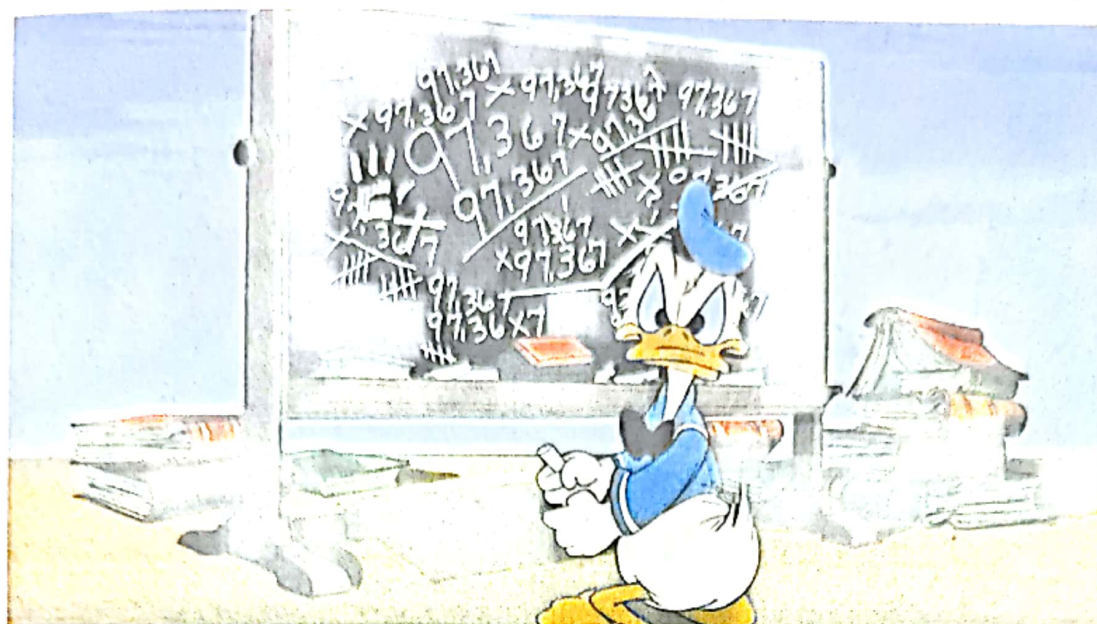
reclamă un anumit grad de sofisticare intelectuală, iar folosirea imaginilor le poate fi de folos celor care încă nu posedă această sofisticare, ori care n-o vor avea niciodată. Cei cărora le venea greu să-și imagineze o descriere sau să urmărească un dialog într-o carte erau ajutați de o reprezentare grafică stilizată a scenelor și personajelor, precum și de inserarea cuvintelor celui care le pronunța într-un norișor ieșindu-i din gură.

Azi, lucrurile nu mai stau deloc așa, pentru că timpurile moderne ne-au obligat pe toți să ne convertim la multimedialitate: de-acum, scrisul e considerat doar *primus inter pares* printre media, iar asta în cel mai bun caz, și alunecă repede spre ultimul loc, în cazul cel mai rău. Uităm însă adesea că multimedialitatea nu e o noutate, fiind deja prezentă în zorii culturii: în cânturile care constituie poemele antice, în teatrul clasic, în riturile religioase și politice etc. Dialogurile platoniciene, în particular, foloseau deja discursul direct și schimbul de fraze scurte, la fel ca în benzile desenate.

În orgia multimedia contemporană, care vede „cultura” social media vehiculată prin SMS-uri, chat, selfie-uri și clipuri video casnice, desenele animate de mai an par antichități și joacă rolul de produse vintage sau de calitate. Ne putem deci aștepta să-și facă loc aici și știința, și matematica.

Primul exemplu istoric e desenul animat *Donald rățoiul în lumea matematicii* (1959) al lui Disney: un foarte reușit scurtmetraj de o jumătate de oră, de găsit pe YouTube, care a avut un enorm succes în școlile din jumătate de lume, și care ilustra unele rezultate ale pitagoreicilor, de la legăturile între numere și muzică, până la proporțiile matematice în arhitectură și artă. În asemenea cazuri, e sigur că grafica animată oferă un auxiliar pentru înțelegere și învățare, fiind considerată o precursoră a graficii computerizate care a revoluționat în vremurile din urmă dezvoltarea didacticii matematicii.

Azi, lui Donald Rățoiul și lui Mickey Mouse ai lui Disney le-a luat locul Simpson, al lui Fox, cu un public de zeci de mi-



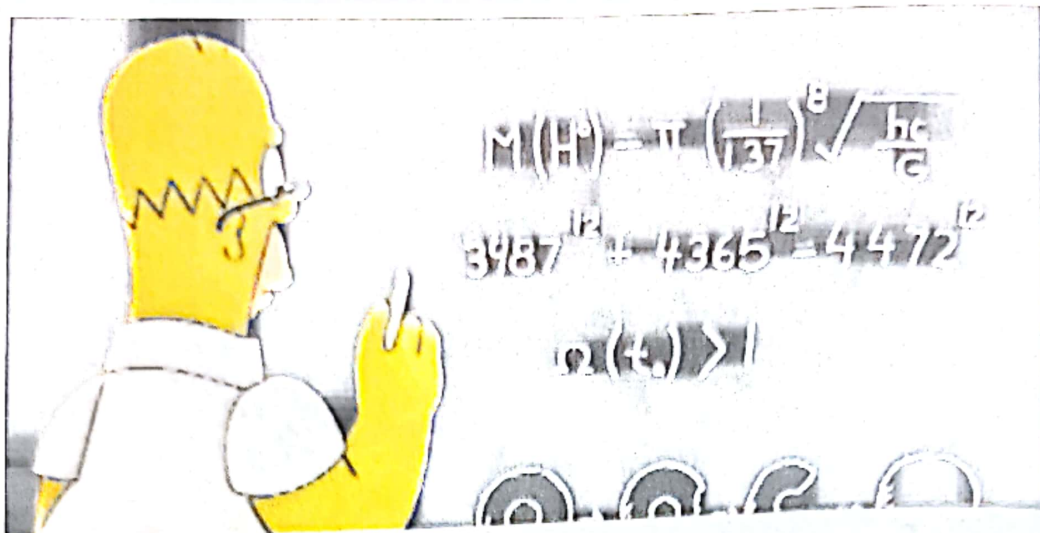
Imagine din filmul *Donald Rățoiul în lumea matematicii*

lioane de spectatori răspândiți în zeci de țări. Sitcomul nu are nici o intenție directă de popularizare, dar sunt și episoade în care matematica și știința apar indirect, scoase la lumină de formația și de interesele graficienilor și scenariștilor. Iar exemplele sunt atât de frecvente, încât au inspirat deja două cărți întregi: *Știința familiei Simpson*¹ și *Familia Simpson și secretele ei matematice*².

Ca să dăm un singur exemplu, în episodul *Treehouse of Horrors* (1995), apare pe o tablă o formulă potrivit căreia suma puterilor a douăsprezecea a lui 1782 și 1841 e egală cu puterea a douăsprezecea a lui 1922. Să fi fost adevărat, atunci ar fi fost un contraexemplu la Marea Teoremă a lui Fermat, iar dacă faci proba cu un calculator de buzunar cu maximum zece cifre pe display, chiar asta iese! În realitate, diferența dintre cele două numere apare abia după a zecea cifră; de altfel, cu un pic de atenție, se poate vedea și cu ochiul liber că ceva nu merge: puterile a douăsprezecea ale lui 1782 și 1841 sunt una pară și

1. Marco Malaspina, *La scienza dei Simpson*, Sironi, 2007.

2. Simon Singh, *The Simpsons and Their Mathematical Secrets*, Bloomsbury Publ., 2013.



Imagine din episodul *Inventatorul din Springfield* (1998)

una impară, deci suma e impară, în timp ce puterea a douăsprezecea a lui 1922 e număr par.

Dar cele mai bune benzi desenate matematice sunt *Ultimul curs la Göttingen*¹ și *Logicomix*². Chiar dacă se concentrează pe aspecte diferite, amândouă spun aceeași poveste epică – aceea a logicii matematice în perioada de aur de la cumpăna secolelor XIX și XX – iar combinația de precizie matematică și calitate artistică le-a permis să atingă apogeul în domeniul popularizării științifice prin benzi desenate.

LA CINEMA

Filmele lui Damon și Crowe

Dacă ar fi să alegem cel mai bun film despre matematică sau despre matematicieni, alegerea ar cădea probabil pe *Omul care a cunoscut infinitul* (*The Man Who Knew Infinity*, 2015), bazat pe cartea omonimă a lui Robert Kanigel. Nu atât și nu numai pentru

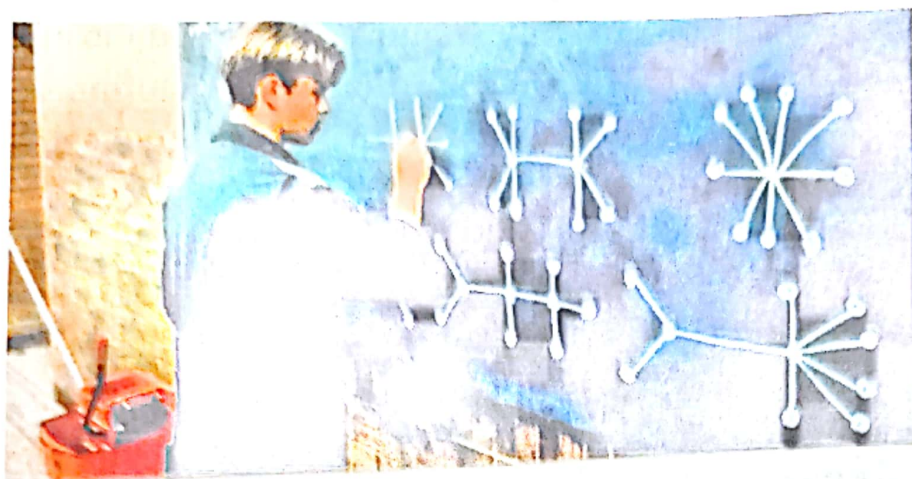
1. Davide Osenda, *Ultima lezione a Gottinga*, 001, 2009.

2. Apostolos Doxidis, Christos Papadimitriou, *Logicomix*, Bloomsbury, 2008 (în greacă), 2009 (în engleză).

povestea extraordinară pe care-o spune, cea a prodigiosului indian Srinivasa Ramanujan, care intuia formule extraordinare fără să aibă nevoie de formule și chiar fără să le poată demonstra. Cât mai ales pentru acuratețea cu care e spusă povestea, atât în privința biografiei, cât și a științei: nu e o întâmplare că la producția filmului au colaborat Manjul Bhargava, Medalie Fields în 2014, și Ken Ono, cunoscător profund al operei lui Ramanujan.

Dacă, în schimb, ar trebui să numim filmele despre matematică sau despre matematicieni care au avut cel mai mare succes de public, alegerea ar cădea, fără nici un dubiu, asupra lui *Good Will Hunting* (1997) și *O minte scilipitoare* (*A Beautiful Mind*, 2001), câștigătoare a două, respectiv patru Premii Oscar. Nimeni însă n-ar putea câștiga râvnitele statuete aurite fără să se plieze pe compromisurile cerute de Hollywood și de legile pieței, compromisuri care includ prevalența verosimilului asupra adevărului și a invenției asupra faptelor. În ambele filme apar deci scene improbabile, ori chiar imposibile: în primul rând, discursul lacrimogen ținut de protagonistul din *A Beautiful Mind* la ceremonia de acordare a Premiului Nobel, la care, în realitate, laureații nu spun un cuvânt, limitându-se la o plecăciune tăcută în fața publicului.

Acestea fiind spuse, ambele filme au fost fundamentale pentru schimbarea felului în care priveau oamenii de obicei matematica, pentru că au spus două povești emoționante despre genii: una inventată, cealaltă adevărată. Povestea lui *Good Will Hunting* pornește de la o teză de diplomă pentru cursul de dramaturgie pe care Matt Damon a scris-o pe când era student la Harvard, în 1992, și pe care a refăcut-o ulterior împreună cu prietenul său Ben Affleck: ambii joacă în film, dar Oscarul l-au câștigat nu ca actori, ci ca scenariști! La început, protagonistul trebuia să fie un fizician: dar Sheldon Glashow, un fizician laureat Nobel care predă la Harvard, i-a sugerat lui Damon că rolul unui geniu izolat se potrivește mai bine unui matematician, pentru că, de obicei, fizicienii lucrează în echipă.



Matt Damon în *Good Will Hunting*

Good Will Hunting a făcut cunoscută publicului Medalia Fields, prezentată în film drept o onoare extraordinară, un analog al Premiului Nobel în matematică, cu avertismentul, pentru cine trebuie să audă, că „în viață mai există și altceva în afara nenorocitei ăleia de Medalii Fields“. Scenariul o pomeneste pentru că o câștigase fictivul profesor Gerard Lambeau, care-l îndrăgește pe acest geniu rebel când descoperă că el este cel care-i rezolvase incognito două probleme lăsate ca provocare pe tablele de pe un coridor al departamentului.

Prima se referă la un anumit graf cu patru vârfuri (trei dintre ele legate în triunghi, al patrulea legat cu buclă la unul dintre celelalte trei) și cere găsirea matricei numerice care-l reprezintă și numărul drumurilor posibile de lungime 3 între două vârfuri. A doua, în schimb, privește determinarea numerică a numărului de arbori care au un număr dat de frunze și reprezentarea grafică a celor ireductibili cu 10 frunze: în film, îl vedem pe geniul rebel desenând 8 din cele 10 posibilități, înainte de a fi întrerupt intempestiv de profesor.

Ideea acestor scene i-o dăduse lui Matt Damon fratele său, când desenase în glumă, pe una dintre tablele celebrului „culoar infinit“ de la MIT din Cambridge, o ecuație extrem de complicată și în întregime falsă.



Russel Crowe în *A Beautiful Mind*

Câteva grafuri apar și în *A Beautiful Mind*, desenate pe geamuri, dar sunt diagrame din teoria jocurilor, în care protagonistul desenează ce vede pe fereastră: o partidă de *touch football*, un stol de porumbei și furtul unei poșete. Filmul povestește, de altfel, existența chinuită a specialistului în teoria jocurilor John Nash, a cărui carieră promițătoare a fost brutal întreruptă de o formă gravă de schizofrenie, dar căruia o remisiune spontană la vârstă înaintată i-a permis să câștige Premiul Nobel pentru economie, acordat pentru lucrările sale de tinerețe.¹

Singura matematică adevărată din norocosul film apare în nefericita scenă în care Nash le explică prietenilor săi la bar că nu e convenabil s-o curteze toți pe singura blondă, pentru că o să-i refuze pe toți, iar brunetele nu vor accepta să fie doar alegerea a doua. Acest comportament ilustrează prost conceptul de echilibru Nash, pentru că fiecare ar putea regreta apoi că nu s-a dus singur la blondă. Dar ilustrează bine faptul că strategiile utile pentru a câștiga patru Premii Oscar sunt extrem de diferite de cele necesare pentru a câștiga un Premiu Nobel.

1. Vezi și secțiunile „Un joc de autor” și „Rămas-bun unei minți strălucite”.

Sitcomul cu cel mai mare succes din istoria televiziunii a fost *The Big Bang Theory*, difuzat fără întrerupere de CBS din SUA timp de doisprezece ani, între 2007 și 2019. A avut 279 de episoade, a câștigat zece Emmy Awards (Premiile Oscar pentru micul ecran) și a făcut să devină populare figurile unor cercetători științifici improbabili, care se simt în largul lor în hiperuraniu, dar au dificultăți în lumea reală.

La început, protagoniștii erau patru profesori universitari de la una dintre cele mai prestigioase instituții americane: California Institute of Technology (Caltech) din Pasadena. Grupul cuprindea un fizician teoretician (Sheldon), un fizician experimentator (Leonard), un astrofizician (Raj) și un inginer aerospațial (Howard). Toți superintelenți – mai ales primii doi, care se puteau lăuda cu un IQ de 187 și, respectiv, 172. Și toți inadaptați social, până și în relațiile cu celălalt sex, reprezentat în sitcom de o chelneriță provocatoare (Penny) și de o specialistă în neuroștiințe extrem de neîndemânatică (Amy). Culmea e că aceasta din urmă era jucată de o actriță (Mayim Bialik) care chiar avea un doctorat în neuroștiințe!

Peripețiile tinerilor cercetători se desfășoară pe fundalul științei și, în particular, al fizicii. Se vede asta chiar din titlurile episoadelor, care conțin nu doar termeni generici, ca ipoteză, postulat, teoremă, corolar, algoritm, efect, factor, reacție, experiment și paradox, ci și concepte specifice, ca dualitate, emisie spontană, nedeterminare, instabilitate, anomalie, anihilare și renormare.

Și se vede mai ales în formulele complicate care apar pe tabla pe care o ține Sheldon în camera de zi, ca să nu-și uite ideile la care lucrează în acel moment. Adesea, formulele apar și dispar într-un *flash*, dar niciodată nu sunt scrise aiurea: una extraordinară, de pildă, arată că ecuațiile de câmp ale lui Einstein sunt o

consecință a ecuațiilor din teoria corzilor. Cel care și-a făcut de cap cu formulele și dialogurile științifice din toate episoadele a fost David Saltzberg, actualmente director al departamentului de fizică și astronomie de la Universitatea din California, la Los Angeles (UCLA).

Nu e deci de mirare că serialul a atras atenția lumii academice și tehnologice și că, *special guest star* în unele episoade au fost savanți ca Brian Greene, Stephen Hawking și George Smoot, sau *tycoons* ca Bill Gates și Elon Musk. La granița dintre realitate și fantezie se află în schimb doctorul Robert Wolcott, un topolog care-l ajută pe Sheldon să dezvolte o teorie multi-dimensională a timpului, bazată pe teoria grupurilor neabeliene. În episoadele din urmă ale serialului, Sheldon și Amy, căsătoriți în sfârșit, vor primi Premiul Nobel pentru fizică într-un final cu focuri de artificii.

Odată stinse luminile și lăsată cortina, din *The Theory of Big Bang* rămâne cel puțin un adevărat rezultat matematic, enunțat de Sheldon în episodul 73: anume că 73 e „cel mai frumos” număr, pentru că e singurul cu două proprietăți bizare. În primul rând, 73 e cel de-al 21-lea număr prim, iar 21 e produsul dintre 7 și 3. Apoi, în mod simetric, în oglindă, 37 e al 12-lea număr prim.

Că 73 are cele două proprietăți menționate se verifică ușor. Dar ca să arăți că e singurul număr prim care le are a fost nevoie să se întrebuițeze serios Carl Pomerance, un celebru specialist în teoria numerelor, care, în 2014, a publicat o „Demonstrație a conjecturii lui Sheldon”¹. Folosind instrumente sofisticate, care merg de la teorema numerelor prime a lui Hadamard și de la Vallée Poussin până la funcții Cebîșev, Pomerance a arătat întâi că numerele prime Sheldon posibile sunt mai mici decât 10^{45} , apoi că, sub această limită, nu există nici unul în afară de 73. Ceea ce confirmă faptul că în teoria

1. Carl Pomerance și Chris Spicer, „Proof of the Sheldon Conjecture”, *Amer. Math. Monthly*, 126 (2019), 688–698.



Sheldon și Raj în *The Big Bang Theory*

numerelor e ușor să inventezi probleme simplu de enunțat, chiar și într-un sitcom televizat, dar greu de rezolvat, chiar și într-un departament de matematică.

POSTĂRI PE YOUTUBE

Clipurile lui Launey

Se spune că în primele decenii după inventarea tiparului mulți cumpărau cărți și le dădeau la copiat unor copiiști, ca să le readucă la condiția de manuscrise cu care erau obișnuiți. Anecdota sună ciudat, de-a dreptul incredibil, dar asta doar până ne amintim că, după inventarea PC-urilor, mulți dintre noi au continuat să imprime imaginile de pe ecran pentru exact același motiv. Altfel spus, abia generațiile născute după inventarea unor noi *media* le vor folosi corect, în timp ce acelea care le-au văzut apărând se vor adapta mult mai greu.

Să luăm, de pildă, YouTube. La început, mulți matematicieni și oameni de știință l-au folosit numai ca un mediu în care să-și transporte propriile conferințe orale, reușind totuși să le răspândească mult dincolo de grupul restrâns de ascultători



Sheldon și Raj în *The Big Bang Theory*

numerele e ușor să inventezi probleme simplu de enunțat, chiar și într-un sitcom televizat, dar greu de rezolvat, chiar și într-un departament de matematică.

POSTĂRI PE YOUTUBE

Clipurile lui Launey

Se spune că în primele decenii după inventarea tiparului mulți cumpărau cărți și le dădeau la copiat unor copiiști, ca să le readucă la condiția de manuscrise cu care erau obișnuiți. Anecdota sună ciudat, de-a dreptul incredibil, dar asta doar până ne amintim că, după inventarea PC-urilor, mulți dintre noi au continuat să imprime imaginile de pe ecran pentru exact același motiv. Altfel spus, abia generațiile născute după inventarea unor noi *media* le vor folosi corect, în timp ce acelea care le-au văzut apărând se vor adapta mult mai greu.

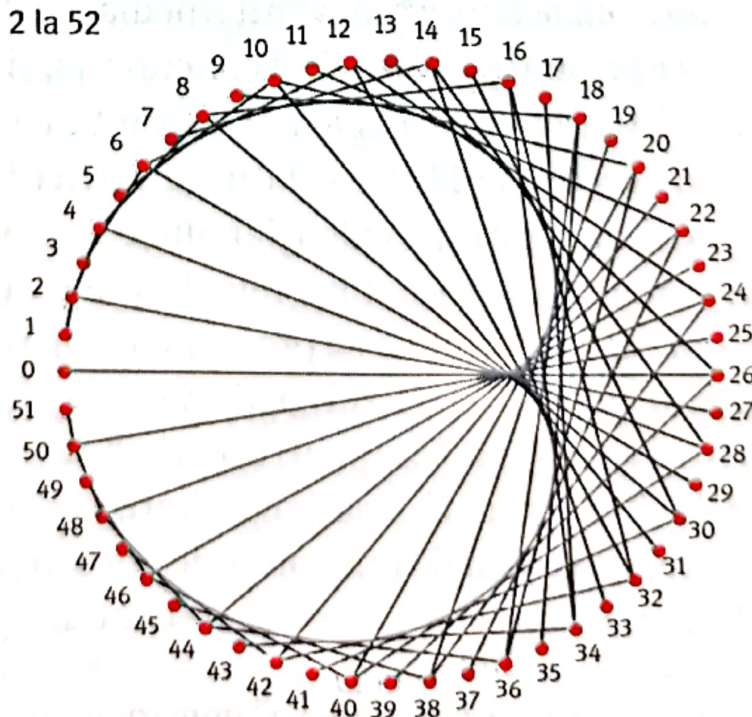
Să luăm, de pildă, YouTube. La început, mulți matematicieni și oameni de știință l-au folosit numai ca un mediu în care să-și transporte propriile conferințe orale, reușind totuși să le răspândească mult dincolo de grupul restrâns de ascultători

căroră le fuseseră destinate. A fost nevoie să așteptăm niște tineri mai familiarizați cu aspectul vizual al conferințelor pentru ca acest nou *medium* să fie folosit într-un mod mai inovativ și adecvat. Unul dintre campionii domeniului e Mickaël Launay, un francez de origine poloneză, născut în 1984.

În 2007, tânăr absolvent al prestigioasei École Normale Supérieure (ENS), Launay deschide minunatul site de matematică distractivă MicMaths. În 2013 trece pe YouTube și, în decursul a câțiva ani, canalul său depășește jumătate de milion de înscriși și postează peste 150 de clipuri matematice, obținând numere stelare de vizionări, rezervate îndeobște celebrităților muzicii sau filmului. Spre deosebire însă de marii comunicatori de succes care își largesc adesea aria de folosire făcând rabat de la profunzimea expunerii, Launay a găsit proporția de aur între succes și calitate.

De exemplu, video-ul *Fața ascunsă a tablelor înmulțirii* (https://www.youtube.com/watch?v=-X49Vqgi86E&ab_channel=Micka%C3%AblLaunay) tratează subiecte mult mai avansate decât lasă să se întrevadă titlul modest. Pleacă în surdină cu tabla înmulțirii cu 2 a numerelor până la 10, dar o reprezintă imediat

Tabla înmulțirii de la 2 la 52



cu un graf pe un cerc cu 10 puncte. După care extinde această tablă la numere din ce în ce mai mari și arată că graficele tind aproape prin miracol la figura unei petale în formă de inimă (o cardioidă). Trece apoi la tablele înmulțirii cu 3, 4 etc. care produc flori cu două, trei, patru petale etc. Și arată, în fine, cum tablele numerelor fracționare, nu întregi, produc figuri intermediare care fac trecerea graduală de la o floare la alta. În plus, aceste flori devin din ce în ce mai complexe și fascinante pe măsură ce cresc numerele cu care se înmulțește.

Și totul în zece minute! Câți pot fi interesați de o asemenea grădină în floare? E suficient să ne uităm la numărul de vizualizări: a depășit cinci milioane! Ca dovadă că, dacă noile *media* sunt bine folosite, se poate ajunge la un public de neimaginat cu cele vechi. Asta și pentru că să descrii în cuvinte ce se poate arăta cu imagini e mult mai complicat și mai puțin interesant.

Înseamnă asta că scrisul, cuvântul scris, e sortit să lase locul imaginilor, cel puțin în matematică? Absolut deloc, așa cum a demonstrat în 2019 chiar Launay. Cunoscând, ca bun francez ce e, adagiul lui Mallarmé *tout, au monde, existe pour aboutir à un livre*, „totul, în lume, există pentru a sfârși într-o carte”, celebritatea matematică a YouTube-ului a publicat pe hârtie *Marele roman al matematicii**, devenit imediat un bestseller în Franța.

Ceea ce arată că nu există concurență, ci complementaritate între diferitele *media*: cele noi nu sunt menite să le înlocuiască pe cele vechi, ci să le stea alături. Pentru că sunt lucruri care se fac mai bine într-un video, iar altele care au nevoie de o carte: cum sunt poveștile, chiar cele despre matematică. Nu întâmplător cartea lui Launay e programatic un roman, pentru că, așa cum ar spune Eclesiastul, „Există *medium* pentru orice. *Medium* pentru a citi și *medium* pentru a privi”. Iar followerii lui Launay pe YouTube, transformați în cititori, vor descoperi o altă față a acestui excepțional, unic comunicator care, asemenea unui rege Midas al matematicii, transformă orice atinge în aur intelectual.

* *Le grand roman des maths*, Flammarion, 2016 (n. tr.).

Paul Erdős a fost unul dintre cei mai cunoscuți matematicieni ai secolului XX, inclusiv pentru excentricitățile sale. Nu posedă nimic, nici măcar o locuință fixă, obișnuia să-și facă apariția în pragul casei câte unui coleg spunând „Mintea mea e deschisă”.¹ După ce demonstra cu el câteva teoreme, o lua către un alt coleg, mereu în activitate, ceea ce i-a permis să publice peste o mie de lucrări originale. Când dădea peste o demonstrație perfectă, a sa ori a altcuiva, spunea că provine direct din *The Book*, „din Carte”, subînțelegând: aceea scrisă de Dumnezeu (pe care el îl numea expresiv „Marele Fascist”).

În ultimii săi ani de viață, Martin Aigner și Günter Ziegler l-au îndemnat să reconstituie măcar în parte această Carte, strângând în ea cele mai frumoase demonstrații din matematică: anume, acelea cu un raport maxim între calitatea rezultatului și prețul argumentului. Erdős s-a pus cu entuziasm pe treabă și *Proofs from the Book*² s-a publicat în martie 1998, cu ocazia celei de-a optzeci și cincea aniversări, chiar dacă el murise între timp, în vara lui 1996.

Un alt legat al său e o lungă listă de probleme propuse, unele ușor de enunțat, dar greu de demonstrat. Una dintre favoritele sale era așa-numita *conjectură a discrepanței*, în care e vorba despre orice șir care conține numai numerele 1 și -1 în ordine arbitrară, dar fiecare din ele de o infinitate de ori. Din acest șir se pot extrage subșiruri finite de „amplitudine constantă”: constituite, deci, ori din termeni succesivi, ori din termeni luați la distanță doi, ori la distanță trei etc. Iar conjectura afirmă că între sumele acestor subșiruri există valori arbitrar de mari: altfel spus, șirul sumelor tinde la infinit.

1. Bruce Schechter, *My Brain Is Open. The Mathematical Journeys of Paul Erdős*, Simon & Schuster, 2000.

2. Springer, 1998.

În septembrie 2015, Terence Tao a publicat o demonstrație a conjecturii, iar unul dintre aspectele interesante e că aceasta a implicat colaborarea online masivă dintre mai mulți matematicieni. De fapt, nu era o noutate: ideea datează de la Tim Gowers, medaliat Fields care din 2007 ține un foarte interesant blog de discuții matematice¹, și care inaugurase într-o postare din 2009 proiectul Polymath, folosit de Tao pentru demonstrația sa.²

Colaborare între matematicieni a existat dintotdeauna: începând cu transmiterea orală a cunoașterii, care rămâne și azi cea mai bună formă de învățare a matematicii. Dar proiectul Polymath a folosit potențialitatea calculatorului pentru a face colaborarea enorm de largă și de rapidă. Iar Tao a fost încă de la început un utilizator înțelept al acestei potențialități pe blogul său³, pe care însuși Gowers l-a definit drept „regele blogurilor matematice“.

În cazul pe care-l discutăm însă, demonstrația îi aparține în totalitate: colaborarea redusese doar problema la un caz particular pe care Tao l-a rezolvat apoi singur. De altfel, matematicianul australian de origine chineză e cunoscut ca un tip extraordinar, copil-minune la vremea lui. La nouă ani, era cel mai tânăr student al prestigioasei Johns Hopkins University din Baltimore care a obținut titlul de „talent excepțional“. Există o fotografie istorică a lui, la zece ani, gânditor, alături de Paul Erdős, la fel de căzut pe gânduri. La unsprezece, doisprezece și treisprezece ani a devenit cel mai tânăr câștigător al unei medalii de bronz, de argint și de aur la Olimpiada Internațională de Matematică. La șaisprezece ani a absolvit masteratul, la douăzeci și unu și-a luat doctoratul, la douăzeci și patru a câștigat postul și la treizeci și unu Medalia Fields.

În afară de mai multe cărți care adună postările de pe blog, cartea sa cea mai interesantă pentru un cititor nespecialist e

1. gowers.wordpress.com.
2. polymathprojects.org.
3. terrytao.wordpress.com.



Erdős și Tao în 1985

*Rezolvarea problemelor de matematică. O perspectivă personală*¹, care, prin intermediul unei serii de exemple simple din aritmetică, algebră și geometrie, arată cum lucrează mintea unui geniu. O minte care, la mai puțin de cincizeci de ani, e încă în plină forță și ne rezervă multe surprize. Dar deja Tao e considerat reîncarnarea vreunui matematician universal din trecut, de la Gauss la Hilbert, stirpe care părea de-acum stinsă din cauza enormei creșteri orizontale și verticale a matematicii, dar care pare să renască prin el.

1. *Solving Mathematical Problems. A personal Perspective*, Oxford Univ. Press, 2006.

POVESTIRE

DOI ȘI CU DOI FAC CINCI

Dostoievski

1864 a fost un an de cumpănă pentru Dostoievski. Până atunci fusese un scriitor realist și laic, vezi *Oameni sărmani* (1844) sau *Umiliți și obidiți* (1861), apoi va deveni un scriitor existențialist și religios, de exemplu în *Crimă și pedeapsă* (1866) sau *Frații Karamazov* (1880). În acel an a publicat un manifest al iraționalismului intitulat *Însemnări din subterană*, al cărui protagonist e un personaj josnic care se autodenumeste „șobolan de canal”.

În roman, Dostoievski se dezice de studiile tehnice (inginerie) pe care le absolvise și minimalizează gândirea științifică și rațională în comparație cu cea umanistă și irațională, inaugurând un *topos* european care va culmina cu romanul-monstru *Omul fără însușiri* (1930–1942) al lui Robert Musil, alt inginer apostat ca și el.

Dostoievski identifică dogma centrală a gândirii științifice în expresia $2 \times 2 = 4$, care apare de mai multe ori în roman ca simbol al coerciției raționale. De exemplu:

Nici vorbă, vor striga ei la domniile voastre, nu-i voie să protestezi: doi ori doi fac patru! Natura nu vă cere părerea, puțin îi pasă de dorințele voastre, dacă vă plac sau nu vă plac legile ei. Sunteți obligați s-o acceptați așa cum este ea, prin urmare să-i acceptați și rezultatele. Zidul, deci, este zid.

Etc. Etc.“ Doamne, Dumnezeuule, păi ce-mi pasă mie de legile naturii și ale aritmeticii, când – cine știe de ce – mie nu-mi plac aceste legi și acest doi ori doi? Firește, n-o să sparg zidul cu fruntea dacă într-adevăr n-o să am putere ca să-l sparg, dar n-o să mă resemnez în fața lui numai pentru că am un zid de piatră și nu m-au ținut puterile să-l sfărâm.

Ajunge chiar să susțină că omul liber ar trebui să se elibereze de această constrângere aritmetică, proclamând, în schimb, că $2 \times 2 = 5$:

Dar doi ori doi fac patru este totuși ceva nesuferit. Doi ori doi fac patru nu-i, după părerea mea, decât o impertinență. Doi ori doi fac patru se uită ca un filfizon, îți stă în drum cu mâinile în șolduri, nu te lasă să treci și scuipă. Sunt de acord că doi ori doi fac patru este un lucru excelent; dar, dacă ne apucăm să lăudăm totul, atunci și doi ori doi fac cinci este uneori un lucrușor nemaipomenit de drăguț.

În concluzie:

Conștiința e, bunăoară, infinit mai presus decât doi ori doi. După doi ori doi, firește, nu-ți mai rămâne nimic, nici de făcut, nici chiar de aflat.

În realitate, alegerea lui $2 \times 2 = 5$ ca simbol arhetipal al gândirii iraționale datează cu mult dinaintea lui Dostoievski. Deja *Cyclopaedia* (1728) lui Ephraim Chambers, model al mai faimoasei *Encyclopédie* (1751–1780) a lui Denis Diderot și Jean Baptiste D'Alembert, explica la intrarea *Absurd*: „Ar fi absurd să afirmăm că doi ori doi fac cinci, ori să negăm că doi ori doi fac patru.“

Dostoievski nici n-a fost primul literat care revendică dreptul ori, măcar, dorința, de a greși adunările sau înmulțirile. Lord Byron, de exemplu, scria încă din 1813, într-o scrisoare către viitoarea sa soție, Annabella: „Știu că doi și cu doi fac patru, mi-ar plăcea și să știu de ce, însă trebuie să admit că aș

fi mult mai mulțumit dacă aş reuși să fac așa încât doi și cu doi să facă cinci.“

Din fericire, nu toți umaniștii sunt din stirpea asta. Abatele Emmanuel Joseph Sieyès, de pildă, scria în pamfletul *Ce este a treia stare?* (1879), devenit manifestul Revoluției Franceze: „Dacă Constituția stabilește că două sute de mii de persoane din douăzeci și șase de milioane de cetățeni pot alege două treimi din parlament, atunci doi cu doi fac cinci.“

Iar Victor Hugo comenta după cum urmează rezultatul referendumului din 1851 în favoarea loviturii de stat a lui Napoleon III, în *Napoleon cel Mic* (1852): „Nu ajungem departe dacă șapte milioane și jumătate de votanți declară că doi ori doi fac cinci, că linia dreaptă e cea mai lungă și că întregul e mai mic decât părțile lui.“

În secolul XX, cel care a pus semnul egal între gândirea totalitară și impunerea de ecuații greșite a fost George Orwell, în 1984: „Dacă partidul va spune că doi ori doi fac cinci, și mai devreme ori mai târziu o va face, noi va trebui să credem. De altfel, de unde știm noi că doi ori doi fac patru?“ S-o fi inspirat din stalinistul Yakov Guminer care, într-un manifest din 1931, scrisese: „Doi ori doi fac cinci, adică aritmetica primului plan cincinal, plus entuziasmul muncitorilor.“ Ori din nazistul Hermann Göring, care declarase: „Dacă Führerul vrea, doi ori doi fac cinci.“

Sintetizând, atenție la ideile celui de-al doilea Dostoievski și ale lui Musil, pentru că ele formează cea mai scurtă linie de legătură dintre Hitler și Stalin.

PRINCIPIUL ANNEI KARENINA

Tolstoi

Mulți cunosc începutul romanului Anna Karenina: „Toate familiile fericite se aseamănă între ele. Fiecare familie nefericită însă e nefericită în felul ei.“ Puțini însă cunosc principiul

Annei Karenina, al lui Jared Diamond, enunțat de el în cartea *Guns, Germs and Steel* (W.W. Norton, 1997): „Toate animalele domestice se aseamănă. Fiecare animal care n-a fost domesticit n-a fost domesticit în felul său.”

În termeni mai puțini concisi, Diamond lămurește că animalele au adesea o căsnicie nefericită cu oamenii din mai multe motive: obiceiuri alimentare dificile, rată de creștere lentă, obiceiuri de reproducere incompatibile cu captivitatea, fire agresivă, tendință către panică și lipsa instinctului gregar. Numai acele puține specii compatibile cu oamenii la toate aceste capitole garantează posibilitatea unei căsnicii fericite.

Odată avizați însă asupra conținutului metaforic al principiului Annei Karenina, îi descoperim repede și alte aplicații. Nu e altceva, de exemplu, decât o versiune a *criteriului falsificabilității* enunțat de Aristotel și reluat de Popper, potrivit căruia o afirmație universală e falsă atunci când admite un singur contraexemplu, și e adevărată în caz contrar. Așadar, toate afirmațiile universale adevărate se aseamănă între ele, pentru că nu admit nici un contraexemplu. În schimb, fiecare afirmație universală falsă e falsă în felul ei propriu, din cauza unuia sau a mai multor contraexemple specifice.

Tot așa, principiul Annei Karenina e o versiune a *criteriului unanimității*, care cere acordul tuturor pentru adoptarea unei decizii. În sensul acesta, toate deciziile unanime se aseamănă, pentru că nu au avut nici un vot împotrivă. Dar fiecare decizie neunanimă e așa în felul ei propriu, din pricina unuia sau mai multor voturi împotrivă specifice.

În practică, exemple de aplicare a principiului sunt concursurile sportive eliminatorii și lupta pentru supraviețuire, pentru că singurul mod de a câștiga ori de a supraviețui e depășirea tuturor obstacolelor, în timp ce fiecare obstacol e o eventualitate diferită de pierdere sau dispariție. După cum spunea deja Aristotel, în *Etica nicomahică*: „Se poate greși în

multe feluri, dar există un singur fel de a proceda bine. Doar într-un fel poți fi bun, rău în nenumărate.“

N-ar trebui totuși să ne mirăm că găsim într-o operă a lui Tolstoi conținut științific, fie și metaforic. Într-adevăr, cealaltă capodoperă a sa, *Război și pace* (1869), e plină de citări de natură matematică și fizică. Bătrânul prinț Bolkonski, de pildă, e pasionat de „calcul de matematică înaltă“ și îi predă fiicei sale Maria „lecții de algebră și geometrie“. Exact la jumătatea romanului vine vorba despre marea cometă din 1812 și se amintește că parcurgea „o curbă parabolică“: chiar dacă, mai târziu, s-a calculat că, în realitate, era o curbă eliptică, cu perioada orbitală de circa 3.100 de ani.

De mai multe ori e citată legea lui Newton:¹ de exemplu, pentru a afirma că dorul de familie al tânărului Rostov, ori energia impactului armatei franceze creșteau în manieră invers proporțională cu pătratul distanței față de casă, sau față de armata rusă. Dar poate că cel mai frumos citat din Tolstoi în direcția asta e cel din povestirea *Moartea lui Ivan Ilici* (1886), pentru care totul devine din ce în ce mai negru, în manieră invers proporțională cu pătratul distanței față de moarte, în timp ce „această imagine a pietrei ce cade cu viteză tot mai mare i se întipări în suflet“.

Imaginile cinematice abundă în descrierea ciocnirilor dintre armate și dintre forțele implicate, care se adună conform „reguli diagonalei paralelogramului“. Dar surpriza cea mai mare e felul cum folosește Tolstoi analiza matematică în teoria istoriei, rezumat după cum urmează: Numai admitând printre cele ce se pot observa unitățile infinit de mici – diferențiala istoriei, adică aspirațiile omogene ale tuturor oamenilor – și însușindu-ne arta integrării (adică a adunării acestor cantități infinit de mici), putem spera să înțelegem legile istoriei. Ideea aceasta i-a fost sugerată de prietenul său, matematicianul Serghei Urusov, care-a

1. Vezi secțiunea „Puterea formulelor“.

anticipat-o în 1868 în *Cercetare despre problemele matematico-militare ale campaniilor din 1812 și 1813*. Mai târziu, s-a declarat entuziasmat de felul în care a folosit-o Tolstoi, reușind să dea o formă literară sublimă unei idei geniale de matematică aplicată istoriei.

CALCULELE COLUMBIEI

Verne

Jules Verne e printre pușinii romancieri, dacă nu chiar unicul, care și-a așezat îndrăznețele invenții literare pe baze științifice. A mers până la inserarea în cărțile sale nu doar a unor formule izolate, ci a unor întregi capitole de divagații matematice care, pentru majoritatea alfabetizată a cititorilor săi, constituie probabil numai obstacole care trebuie depășite în grabă, însă aduc unei minorități numerizate valoare adăugată *Călătoriilor extraordinare*.

În mai multe romane, Verne a lansat în spațiu proiectile cu ajutorul tunurilor, ținând seamă scrupulos de *viteza cosmică* (de evadare) pe care trebuie s-o aibă un corp ca să poată depăși atracția Pământului la suprafața sa, și, în general, atracția unui corp de masă M aflat la distanță r de centrul său. În capitolul IV din *În jurul Lunii* (1870), intitulat „Un pic de algebră”, găsim o discuție despre ceea ce în epocă se numea *ecuația forțelor vii*, iar azi se cheamă *teorema energiei cinetice*: anume, faptul că suma dintre energia cinetică și cea potențială ale unui corp rămâne constantă de-a lungul parcursului.

Cum viteza de evadare a unui corp de masă m supus forței gravitaționale e prin definiție aceea care-i permite să ajungă la infinit cu viteză nulă, la sfârșitul parcursului vor fi nule atât energia cinetică ($mv^2/2$), cât și cea potențială ($-GmM/r$).¹ În consecință, suma energiilor cinetică și potențială trebuie să

1. Vezi secțiunile „Puterea formulelor” și „Cheia sistemului solar”.

fie nulă și la început, de unde rezultă că v e egal cu $\sqrt{2GM/r}$, sau, echivalent, cu $\sqrt{2gr}$, unde G este constanta gravitațională universală, iar g , atracția gravitațională a corpului de masă M la distanță r . Așa cum Verne amintește adesea, chiar dacă nu întotdeauna ține cont de asta, în cazul Pământului, viteza de evadare de la suprafața lui rezultă că este 11,2 km pe secundă.

În plus, în capitolul XV, intitulat „Hiperbolă sau parabolă”,¹ amintește că viteza de evadare de pe o suprafață e un caz-limită: un proiectil tras cu exact acea viteză se mișcă la nesfârșit pe traiectorie parabolică și cu viteză descrescătoare care nu doar că tinde la zero, ci e egală în fiecare punct cu viteza de evadare din acel punct. Dacă viteza inițială e superioară vitezei de evadare, atunci proiectilul se mișcă la nesfârșit pe o traiectorie hiperbolică, cu o viteză descrescătoare care tinde la o valoare pozitivă, și către o direcție asimptotică perpendiculară pe direcția pe care a fost lansat. Iar dacă viteza inițială e inferioară celei de eliberare, atunci proiectilul urmează o traiectorie eliptică: dacă aceasta intersectează Pământul, proiectilul cade pe Pământ, altfel orbitează în jurul lui.

În practică însă e imposibil să proiectezi astronauți la o viteză mai mare sau egală cu cea de eliberare. În primă instanță, din pricina efectelor dezastruoase pe care le-ar avea atmosfera terestră asupra navei. Dar, mai ales, din pricina accelerației imense pe care ar trebui s-o suporte. Într-adevăr, din formulele lui Galilei $v = at$ și $s = at^2/2$, se obține $a = v^2/2s$. Chiar presupunând că am avea un tun lung de 100 de kilometri, adică mai lung decât scoarța terestră și atmosfera terestră luate împreună, accelerația tot ar fi mai mare decât 600 de metri pe secundă la pătrat: adică aproximativ $60g$, mai mult decât dublul celei pe care o poate suporta un om. Tunul imaginat de Verne în *De la Pământ la Lună* (1865) nu are însă decât 300 de metri, caz în care accelerația ar fi de $20.000g$, nemăsurat de mare.

1. Vezi secțiunea „Azi, conicele”.

Pe de altă parte, viteza de evadare de pe suprafața Pământului nu e nimic față de cea necesară pentru a provoca un recul, așa încât axa terestră să se îndrepte, ca în romanul *Întâmplări neobișnuite* (*Sans dessus dessous*), din 1889. Ediția originală conținea un „capitol complementar” de fizică matematică, adresat „puținelor persoane interesate” și menit să „demonstreze ceea ce romanul a arătat”. În particular, să explice cum „o eroare de trei zerouri în date a produs o eroare de douăsprezece zerouri în rezultatul final”.

Protagonistul romanului face, într-adevăr, o eroare de trei zerouri când scrie raza Pământului, schimbând kilometrii în metri. Asta produce o eroare de trei zerouri în momentul cinetic mv al proiectilului de masă m și viteză v , și una de cincisprezece zerouri în momentul de inerție $2Mr^2/5$ al Pământului, pentru că masa M este proporțională cu cubul razei. Eroarea în raportul respectiv e deci de douăsprezece zerouri, de unde rezultă că axa terestră e îndreptată cu câțiva microni, nu cu 23 de grade.* Ceea ce confirmă că cititorii lui Verne pot avea încredere în calculele sale, așa cum și el avea încredere în cele făcute de consilierii săi.¹

DUEL LA DISTANȚĂ

Joyce și Borges

Iată cum descrie Borges mulțimea tuturor cărților posibile în memorabila povestire *Biblioteca Babel* (1941):

Universul (pe care alții îl numesc bibliotecă) se compune dintr-un număr indefinit și poate infinit de coridoare hexagonale, cu lungi puțuri de ventilație în mijloc, înconjurate

* Vezi secțiunea „Douăzeci și trei de grade și jumătate”.

1. Titlul acestui capitol făcea aluzie la *Columbiad*, numele tunului despre care e vorba în romanul lui Jules Verne, dar și la modulul de comandă al misiunii Apollo 11 (n. tr.).

de prispe joase. De la fiecare hexagon se văd etajele inferioare și superioare: la nesfârșit. Dispunerea coridoarelor este invariabilă. Fiecărui perete din fiecare hexagon îi corespund cinci rafturi; fiecare raft conține treizeci și două de cărți de același format; fiecare carte are patru sute zece pagini; fiecare pagină, patruzeci de rânduri, fiecare rând, vreo optzeci de litere de culoare neagră.

Presupunând că alfabetul are 25 de simboluri, fiecare putând fi majusculă sau minusculă, și că ar exista 10 semne de punctuație, numărul cărților din biblioteca Babel ar fi dat de toate combinațiile cu repetiție posibile ale celor 60 de simboluri pe $410 \times 40 \times 40$ de poziții, care sunt 60 la puterea 656.000: adică un număr de ordinul lui 10 la a 10-a la a 6-a.

Este nevoie de 1.166.468 de cifre pentru a scrie explicit acest număr, deci de aproape două volume din bibliotecă. Iar ca să scrii catalogul bibliotecii, lucrurile se complică: chiar dacă presupunem fiecare titlu de numai un rând, ordinul de mărime al catalogului ar fi mai mult sau mai puțin cât al întregii biblioteci, din moment ce factorul de compresie ar fi numărul de rânduri dintr-un volum, adică 16.400.

Oricât de stratosferic, numărul de volume al bibliotecii Babel a fost depășit de departe de un număr descoperit în 2018 de grupul *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS), „Marea Căutare pe Internet a Numerelor Prime Mersenne”. În douăzeci și cinci de ani, grupul a stabilit deja de douăzeci de ori recordul de *cel mai mare număr prim cunoscut*. Acum, recordul e deținut de numărul descoperit chiar în 2018, anume 2 la puterea 82.589.933 fără 1, de ordinul lui 10 la puterea 10 la puterea a 7-a. Este nevoie de 24.862.048 de cifre pentru a-l scrie, așadar aproape 38 de volume din biblioteca Babel.

Cum Euclid demonstrase deja că, dat un număr prim Mersenne M^1 , numărul $M(M+1)/2$ este perfect, adică egal cu suma

1. Vezi secțiunea „Omletă matematică”.

divizorilor săi proprii, din precedentul record se obține *cel mai mare număr perfect cunoscut*, care e 2 la puterea 82.589.933 fără 1 înmulțit cu 2 la puterea 82.589.933, și acesta de ordinul lui 10 la a 10-a la a 7-a. Pentru a-l scrie, sunt necesare 49.724.095 de cifre, și deci aproape 76 de volume din biblioteca Babel.

Cu siguranță, Borges nu a fost singurul literat fascinat de numerele mari. Un altul a fost James Joyce, cel puțin conform acestui pasaj din „Itaca”, episodul al șaptesprezecea din *Ulise*:

Pentru că, mai înainte cu câțiva ani, în 1886, pe când fusese preocupat de problema cvadraturii cercului aflate despre existența unui număr calculat până la un grad de exactitate relativă încât să fie de o astfel de mărime și cu atât de multe cifre, de pildă de puterea a 9-a a puterii a 9-a a puterii a 9-a, încât, rezultatul fiind obținut, 33 de volume tipărite cu litere mici de 1.000 de pagini fiecare din nenumăratele teste de câte 24 sau 25 de coli sau de topuri de hârtie de mătase ar fi trebuit să fie strânse pentru a cuprinde întreaga expresie a numerelor sale integrale, de unități, zeci, sute, mii, zeci de mii, sute de mii, milioane, zeci de milioane, sute de milioane, miliarde, nucleul nebuloasei din fiecare din cifrele simple ale fiecărei serii cuprinzând în volum succint potența de a fi ridicat la cea mai ridicată expresie cinetică a oricărei puteri a oricăreia dintre puterile ei.

Numărul citat de Joyce este 9 la puterea 9 la puterea 8. Cele 369.693.100 de cifre ale sale ar umple 564 de volume din biblioteca Babel, cu mult mai scurte decât cel pe care-l avea în minte Joyce.

Dacă, în loc de o bibliotecă de cărți, Borges ar fi considerat *o bancă universală de date a genomurilor umane*, ar fi ajuns la o cifră și mai mare. Într-adevăr, genomul uman e constituit dintr-un șir de circa trei milioane de baze, fiecare ales dintr-un alfabet de patru (G, A, T și C). În acest caz, combinațiile posibile, corespunzând varietății biologice a genului uman, sunt exact 4 la puterea 3.000.000.000: un număr de ordinul lui

10 la 10 la a 9-a, ale cărui 1.806.179.974 de cifre ar umple 2.753 de volume din biblioteca Babel.

După cum se vede, cu un pic de fantezie se pot imagina ușor numere stratosferice la care doar arareori se ajunge în practica matematică.

NUMERELE LUI IOSIF ȘI ALE FRAȚILOR SĂI

Mann

Uriășul roman *Iosif și frații săi* (1933–1943), de Thomas Mann, Premiul Nobel pentru literatură în 1929, rescrie povestea schițată pe scurt în a doua jumătate a *Facerii*: peripețiile patriarhului Iacob și ale celor doisprezece fii ai săi, pe care tradiția ebraică îi consideră întemeietorii celor douăsprezece triburi ale lui Israel. E o poveste cu pierderi și regăsiri, cu trădări și iertări, cu emigrare și integrare, cu multe aventuri și cu un fericit final teleologic.

Nimic de mirare că în cele 2.400 de pagini ale celor patru romane care compun această frescă s-a găsit spațiu și pentru câteva divagații numerice. Ocazia se ivește în primul capitol („Thoi”) al părții a doua („Tânărul Iosif”) a primului volum, când tânărul Iosif

învață să cunoască minunea și taina numărului, șaiszeciul, doisprezecele, șaptele, patrul, treiul, divinitatea măsurii, și cum toate se potriveau și-și corespundeau reciproc, încât era o minune și o adorare a marelui unison.

În Antichitate, semnificația acestor numere deriva dintr-o combinație de astronomie și numerologie. De exemplu, 7 era numărul planetelor cunoscute, împărțite în două grupe: Soarele și Luna, pe de o parte, Mercur, Venus, Marte, Jupiter și Saturn, pe de altă parte. Din descompunerea $7 = 2 + 5$ derivă rolul fundamental pe care îl joacă 5 în demonstrația lui Mann:

Căci numărul cinci sta în cel mai frumos raport cu doisprezece, întrucât cinci ori doisprezece dă șaizeciul, dovedit sfânt, într-un raport încă mai frumos cu sfântul șapte, căci cinci cu șapte fac doisprezece. Era asta totul? Nu, cu această ordonare și separare se obținea o săptămână planetară de cinci zile, iar șaptezeci și două ca ea făceau anul; cinci era încă numărul cu care trebuia înmulțit șaptezeci și doi ca să rezulte splendidul trei sute șaizeci – totodată sumă a zilelor din an și câtul împărțirii căii Soarelui prin cea mai lungă linie ce poate fi trasă pe discul lui.

Ultima frază, un pic criptică, e explicată în următorul pasaj în care „marele crug (circuit)” și „micul circuit” indică, respectiv, orbita aparentă anuală a Soarelui, de circa 360 de zile, și cea diurnă a echinocțiilor, de circa 360 de diametre solare aparente (fiecare egal cu circa o jumătate de grad):

Douăsprezece erau semnele zodiacului, și ele erau popasurile marelui crug. Acestea erau cele douăsprezece luni a treizeci de zile. Dar marelui circuit îi corespundea cel mic, căci dacă și el era împărțit în douăsprezece segmente, se obținea un interval mare cât de șaizeci de ori discul solar, și aceasta era dubla oră. Căci diametrul discului solar era cuprins de exact tot atâtea ori în calea Soarelui, vizibilă la echinox, câte zile are anul, adică de trei sute șaizeci de ori, și tocmai în aceste zile, răsăritul Soarelui, din clipa când marginea sa superioară apărea la orizont, până la cea în care discul era vizibil în întregime, dura a șaizecea parte a unei duble ore. Și iată, aceasta era dubla minută.

Celelalte două numere învățate de Iosif interveneau pentru că:

Planetele mai puteau fi ordonate în trei și patru. Căci trei era numărul regenților zodiacului, Soarele, Luna și Iștar. Patru, pe de altă parte, era numărul părților lumii, cărora le corespundeau timpurile zilei; patru mai era numărul

părților în care se descompunea calea Soarelui, fiecare în grija unei planete și, pe deasupra, mai era numărul Lunii și al stelei lui Iștar, care prezentau fiecare câte patru faze. Ce rezulta însă dacă înmulțeați patruzeci cu trei? Rezulta doisprezece!

Toate acestea erau minunate, dar nu atingeau perfecțiunea. Într-adevăr:

Omul trebuie să adauge celor trei sute șaiszeci de zile alte cinci, pentru a le egala astfel cu suma anului solar. Zilele acestea erau rele și nefaste, zile ale balaurilor și blestemelor, ale grelelor nopți de iarnă. Cinciul dobânda aici o reputație nesuferită. Dar și treisprezece era foarte rău, și de ce? Pentru că cele douăsprezece luni lunare aveau laolaltă numai trei sute cincizeci și patru de zile, și din timp în timp trebuia intercalată o lună în plus, de egalizare, care corespundea celei de-a treisprezecea zodii, a Corbului.

Și chiar doisprezecele, de-alminteri totdeauna atât de frumos, devenea de rău augur în această împrejurare, căci trebuia folosit pentru a trece de la cele trei sute cincizeci și patru de zile ale anului lunar la cele trei sute șaiszeci și șase de zile ale anului lunar-solar. Dacă se lua însă ca număr al zilelor trei sute șaiszeci și cinci, lipsea mereu câte un sfert de zi, și această nepotrivire se umfla cu trecerea anilor, așa că, într-o mie patru sute șaiszeci de ani, ajungea să reprezinte un an întreg. Acesta era crugul stelei Câinelui.

După ce inserase deja un capitol de biologie în *Muntele vrăjit* (1924), iată că Mann introduce și unul matematico-astronomic în *Tânărul Iosif* (1934), dovadă a faptului că, în mâinile unui mare scriitor, chiar și aparent arida știință poate deveni literatură.

La începutul anilor treizeci ai secolului trecut, în Viena se intersectau viețile unui inginer, unui matematician și unui chimist, fiecare dintre ei autor al câte unei capodopere literare a secolului XX. E vorba despre Robert Musil, Hermann Broch și Elias Canetti, care au publicat, pe rând, *Omul fără însușiri* (1930–1942), *Somnambulii* (1930–1932) și *Orbirea* (1935).

Fiecare dintre cele trei romane descrie, în felul său propriu, disoluția valorilor în perioada dintre cele două războaie, când deja Austria (iar, în cazul lui Musil, Germania) se eliberase de jugul imperial, dar stătea să cadă sub cel nazist. Și fiecare dintre cei trei scriitori, indiferent de formația sa, ajunge să abjure gândirea științific-matematică, prezentând-o ca rădăcină a tuturor relelor secolului.

Aceste trei romane *monstru* au intrat în istorie, dar Broch a atacat aceleași probleme și într-o manieră mai concisă, echilibrată și lizibilă, în *Necunoscuta* (1933), care face încă din titlu referire la matematică. Richard Hieck, protagonistul romanului, e un matematician care întrupează raționalitatea și cunoașterea. Îi sunt contrapuse sora Susanna, viscerală și semimistică, și fratele Otto, impulsiv și sentimental, pentru care viața va fi o povară prea grea și va sfârși sinucigându-se.

Iată cum rezumă Richard problema, în timp ce meditează asupra relației dintre studiu și iubire:

Ceea ce trece prin cap e calculabil, limpede și descriptibil, dar ce se petrece sub cap e obscur și nocturn în incalculabilitatea sa. A aborda incalculabilul cu mijloacele calculabilului e singurul lucru important, iar, dacă demersul nu reușește, atunci nu mai rămâne decât separarea netă a celor două părți. Mă gândesc apoi că inima stă la jumătatea dintre

partea superioară și partea inferioară a omului, ca rezultanta într-un paralelogram de forțe.

Opoziția dintre știință și credință, reprezentată în raporturile dintre Richard și Susanna, amintește vag de aceea dintre André și Simone Weil¹, chiar dacă, în mod evident, Broch nu avea cum să se inspire din istoria lor. Pentru matematicienii din roman, însă, cu siguranță s-a inspirat din cei care populau mediul vienez la cumpăna anilor douăzeci și treizeci: în particular, profesorii Hans Hahn și Karl Menger, precum și studenții Gustav Bergmann și Kurt Gödel, pe care-i cunoscuse când frecventa cursurile universității.

Dar în timp ce Menger, Bergmann și Gödel erau încă niște puști, Broch era deja un bărbat matur: după ce începuse studii regulate de matematică, le întrerupsese pentru douăzeci de ani ca să conducă afacerea familiei pe care, la patruzeci de ani, a vândut-o și s-a reînscris la facultate. Și el, și alții gravitau în jurul celebrului Cerc de la Viena de filozofie și știință, fiecare în felul lui: unii mai entuziaști, alții mai sceptici. Așa se explică aluziile la logică pe care Broch le presară în roman.

În particular, acelea care se referă la proiectul logicist al lui Frege și Russell, potrivit căruia „matematica și logica sunt același lucru”. La filozofia primului Wittgenstein, pentru care există „o a doua semnificație a lumii, aproape de neînțeles, inexprimabilă prin cuvinte și formule”. La teoremele de incompletitudine ale lui Gödel, care dovedesc că tot ce se demonstrează în matematică „rămâne întotdeauna doar o parte limitată și neînsemnată a inexpugnabilului munte de cunoștințe, o mică parte care se lasă descrisă din eternul indescriptibil”. Și la abordarea lui Gentzen care, câțiva ani mai târziu, avea să reușească să descopere „o logică fără axiome”, întemeiată doar pe reguli.

Nici unul dintre aceste nume nu e explicit citat în roman, spre deosebire de Leibniz, Kant, Cantor, Maxwell, Einstein și

1. Vezi secțiunea „Fascinația analogiei”.

soții Curie. Iar, în afară de terminologia logică, se atinge și aceea matematică, apar termeni ca mulțime, grup, tensor, asimptotă, meniți, evident, să descrie cu totul altceva: de exemplu, iubirea, ca „o curbă care tinde către infinit, apropiindu-se veșnic de infinit, dar fără să-l atingă vreodată”.

În 1938, Broch a fost arestat de naziști, care tocmai ocupaseră Austria, dar a fost eliberat după trei săptămâni și a reușit să se imbarce către Statele Unite. Pe vapor, a dat întâmplător peste Bergmann și, odată ajunși la Princeton, cei doi s-au reîntâlnit cu Gödel. Toți au frecventat Cercul lui Erich von Kähler, în care se întâlneau mulți dintre intelectualii germani și austrieci fugiți din calea nazismului, de la Einstein la Thomas Mann. Și chiar în casa lui Kähler a scris Broch, în timpul celui de-Al Doilea Război Mondial, *Moartea lui Vergiliu* (1945), care, fiind cea mai ilizibilă dintre capodoperele sale, rămâne cea mai nedeterminată dintre necunoscutele sale literare.

FUNDAMENTELE LITERATURII

Queneau

Fundamentele geometriei (1899), de David Hilbert, formalizează geometria în douăzeci de axiome împărțite în cinci grupe. De exemplu, *axiomele de incidență* afirmă că pentru orice două puncte există o dreaptă care trece prin ele, și numai una singură, că pe fiecare dreaptă există cel puțin două puncte și că există cel puțin trei puncte care nu stau pe aceeași dreaptă. Din *axiomele de ordine* se poate deduce teorema care afirmă că între două puncte există întotdeauna o infinitate de alte puncte. Iar *axioma paralelismului*, echivalentă cu postulatul al cincilea al lui Euclid, spune că, date o dreaptă și un punct exterior ei, există o singură dreaptă care trece prin acel punct și e paralelă cu cea dată.

Hilbert a ilustrat într-o manieră memorabilă aspectul pur formal al axiomatizării sale, spunând că teoremele de geometrie trebuie să continue să fie valabile chiar dacă, în loc de „puncte, drepte și plane”, ar fi vorba despre „mese, scaune și halbe de bere”. În *Fundamentele literaturii după David Hilbert* (1976), scriitorul Raymond Queneau a propus, în schimb, să vorbim despre „cuvinte, fraze și paragrafe”.

Din axiomele de incidență aflăm, în primul rând, că *pentru orice pereche de cuvinte există una și numai o singură frază care le conține pe amândouă*. Acum, că se pot forma fraze cu numai două cuvinte este evident; dar e surprinzător că nu există decât una singură! De exemplu, date „parte” și „lacului” și o frază care le conține pe ambele, cum ar fi „acea parte a lacului Como”, toate celelalte fraze, cum ar fi „acea parte a lacului di Garda” sau „cealaltă parte a lacului Como”, nu sunt decât pseudofraze care trebuie respinse în baza axiomei: altfel spus, și din fericire, nu se scriu două romane *Logodnicii*.*

Axiomele următoare afirmă că *orice frază conține cel puțin două cuvinte și că există cel puțin trei cuvinte care nu fac parte din nici o frază*. Pe de o parte, deci, expresii ca „Da”, „Nu”, „Dumnezeule!”, „Drace!” și altele asemenea nu sunt fraze. Și, pe de altă parte, faptul că Manzoni a eșuat în insistentele sale încercări de a compune fraze care folosesc toate cuvintele limbii italiene nu trebuie imputat vreunei insuficiente prolixități a sale, ci doar unei imposibilități axiomatice. În legătură cu aceste două axiome trebuie totuși observat că ele sunt *metafraze*, nu fraze: altfel, ar contrazice axioma precedentă care nu permite ca două fraze diferite să conțină aceleași două cuvinte (în speță „frază” și „cuvinte”).

Teorema care decurge din axiomele de ordine afirmă că *între două cuvinte există o infinitate de alte cuvinte*, cu toate că orice

* Roman de Alessandro Manzoni, piatră de încercare în bibliografia școlară obligatorie din Italia (n. tr.).

frază pare să conțină numai un număr finit de cuvinte. Soluția lui Queneau pentru aparenta dilemă e strict geometrică: după exemplul bătrânei geometrii proiective, trebuie să apelăm la „cuvinte de la infinit”. Altfel spus, majoritatea infinității de cuvinte despre care teorema ne asigură că există în fiecare frază sunt la infinit și nu pot fi citite de aproape: ceea ce atribuie obscurității proiective a literaturii, și nu incapacității expresive a literaților, blestemul de a spune întotdeauna mult mai puțin decât ar fi putut spune.

În fine, conform axiomei paralelismului, *date o frază și un cuvânt pe care nu-l conține, există o frază și una singură care conține acel cuvânt și nu are nici un cuvânt în comun cu fraza dată*. De exemplu, să luăm prima frază din primul cânt al *Divinei Commedia*: „Pe când e omu-n miezul vieții lui m-aflam într-o pădure-ntu-necată, căci dreapta mea cărare mi-o pierdui”, și cuvântul „strop”: fraza „Un strop mai mult de-amar și m-ar răpune! Dar până să v-arăt a mea scăpare, eu de-alte stări văzute-n ea voi spune” satisface cerințele axiomei, pentru că nu conține cuvinte conținute și în prima frază, iar în primul cânt nu există alte fraze care să conțină cuvântul „strop” (celelalte cânturi nu contează: așa cum o dreaptă și un punct exterior ei determină un singur plan, la fel o frază și un cuvânt pe care nu-l conține trebuie să determine un singur cânt).

Ne-am mărginit până acum la transpunerea literară a drep-telor, care sunt entități geometrice reprezentabile algebric prin ecuații de gradul întâi. Queneau își încheie analiza obser-vând că, trecând la ecuații de gradul al doilea și la conicele pe care le reprezintă, nici măcar nu mai e nevoie de transpuneri, pentru că ne aflăm în chiar domeniul retoricii: într-adevăr, „elipsele, hiperbolele și parabolele sunt, toate, figuri familiare scriitorului, chiar dacă, în zilele noastre, elipsa e rară, parabola nu mai e folosită (de circa două mii de ani), iar hiperbola e monedă curentă”.

Pe 5 iunie 1967 apărea unul dintre cele mai mari succese literare ale secolului XX: *Un veac de singurătate*, de Gabriel García Márquez, care i-a adus autorului Premiul Nobel pentru literatură în 1982 și e considerat cea mai importantă capodoperă a literaturii de limbă spaniolă după *Don Quijote*, de Miguel de Cervantes.

Găsești orice în biblia realismului magic sud-american: trebuie deci să fie și matematică. Într-adevăr, căutând, găsești câte ceva. În primul rând, când citești că „José Arcadio Buendía luă inițiativa și încercă să-i zguduie credința preotului cu ajutorul a mii de șiretlicuri raționaliste“. Sau că „José Arcadio Segundo reuși în câteva luni să se dovedească tot atât de priceput în martingale teologice destinate să-l umilească pe diavol, pe cât era de iscusit în vicleșugurile luptelor de cocoși“.

În spaniola colocvială, cuvântul *martingal* înseamnă „truc“ sau „sofism“, și e probabil că García Márquez nu-i cunoștea și semnificația matematică. Termenul a fost introdus în Franța secolului optsprezece, pentru a indica încercarea de a învinge hazardul la jocurile de noroc prin folosirea în avantaj propriu a regulilor. De exemplu, dacă în jocuri de tipul par-impar, cap-pajură sau roșu-negru se câștigă dublul potului când iese ce ai mizat, altfel pierzându-se potul, trucul constă în dublarea potului la fiecare pas, până câștigi. Iar sofismul constă în faptul că, pentru a fi siguri de victorie, trebuie să ai la dispoziție un capital și un timp infinit.

Infinitul e invocat pentru prima oară în *Un veac de singurătate* în povestea cu cocoșul roșu, spusă ca să treacă mai ușor interminabilele nopți din timpul epidemiei de insomnie:

un joc fără sfârșit în care povestitorul întreba dacă doresc să povestească istoria cu cocoșul roșu, iar dacă i se răspundea

da, povestitorul zicea că el n-a cerut să i se spună da, ci dacă doresc să le povestescă istoria cu cocoșul roșu, iar dacă i se răspundea nu, povestitorul zicea că n-a cerut să i se spună nu, ci dacă doreau să povestescă istoria cu cocoșul roșu, iar dacă toată lumea tăcea, povestitorul zicea că nu ceruse nimănui să tacă, ci să-i spună dacă doreau să le povestescă istoria cu cocoșul roșu, și nimeni nu putea să plece, deoarece povestitorul zicea că nu ceruse nimănui să plece, ci să-i spună dacă doreau să le povestescă istoria cu cocoșul roșu, și tot așa mai departe, într-un cerc vicios care dura nopți întregi.

A doua oară, infinitul e evocat în *visul camerelor infinite* cu care se consola José Arcadio Buendía când se simțea singur:

Visa că se scoală din pat, că deschide ușa și că trece într-o cameră identică cu prima, cu același pat cu căpătâiul în fier forjat, cu același fotoliu din răchită și cu aceeași iconiță a Fecioarei Tămăduirii pe peretele din fund. Din camera aceasta trecea în alta exact la fel, a cărei ușă ducea în alta exact la fel, apoi în alta exact la fel, la nesfârșit. Îi plăcea să umble astfel din cameră în cameră ca într-o galerie de oglinzi paralele, până ce Prudencio Aguilar îl atinge pe umăr. Atunci se întorcea din cameră în cameră, se trezea pe măsură ce venea înapoi, parcurgea drumul invers și-l găsea pe Prudencio Aguilar în camera realității.

În timp ce infinitul din prima poveste e mărginit, cum e tipic pentru *buclele recursive*, cel din a doua poveste e nemărginit, ca în așa-numitul *hotel al lui Hilbert*, inventat anume ca să explice pe înțelesul tuturor teoria lui Cantor.

O altă poveste cu fundal logico-matematic, doar sugerată de data asta, e pusă pe tapet atunci când se vorbește despre sentimentele lui Aureliano José, unul dintre fii colonelului Aureliano Buendía, pentru mătușa lui, Amaranta:

Îndură astfel surghiunul, căutând ocazia de a o ucide cu propria sa moarte, până în ziua când auzi istorisindu-se vechea poveste a omului care se căsătorise cu una dintre mătușile lui care, în afară de asta, îi era și verișoară, și al cărei fiu se dovedise a fi propriul său bunic.

Povestea a devenit populară în 1947, prin cântecul umoristic *I'm My Own Grandpa*, dar circula prin ziare încă de la începutul secolului XIX, și poate că datează chiar din vremea călugărului Alcuin din York (secolul VIII).¹ În orice caz, pentru a deveni propriul bunic, e suficient ca un bărbat să se căsătorească cu fiica soției propriului fiu: caz în care fata este fiica adoptivă a băiatului și nepoata adoptivă a bărbatului, iar bărbatul devine nepotul adoptiv al lui însuși.

Lucrurile se complică atunci când ambele perechi au fiecare și alți copii, într-o sarabandă de intersecții pe care-o poate stăpâni numai o minte matematică. Într-adevăr, când, în 1949, Claude Lévi-Strauss a publicat *Structurile elementare ale rudeniei*, s-a văzut nevoit să-i ceară ajutorul lui André Weil ca să reușească să se orienteze în teoria grupurilor, teorie ce s-a dovedit un instrument necesar pentru a nu naufragia în acel gen de cercetări.

AUR ADEVĂRAT ȘI FALS

Dan Brown

Codul lui Da Vinci, de Dan Brown*, a fost primul mare succes editorial al secolului XXI, cu optzeci și cinci de milioane de exemplare vândute. Una dintre temele sale e legătura dintre secțiunea de aur, șirul lui Fibonacci și Leonardo, totul înfășurat într-un ghem de fapte reale și închipuite care poate fi

1. Vezi secțiunile „Răsfoind benzi desenate” și „Jeepuri în deșert”.

* RAO, București, 2013 (n. tr).

interesant de depănat, pentru a exemplifica felul în care *media* (nu doar romanele, ci mai ales ziarele, televiziunea și filmul) încurcă și răstălmăcesc știința și matematica.

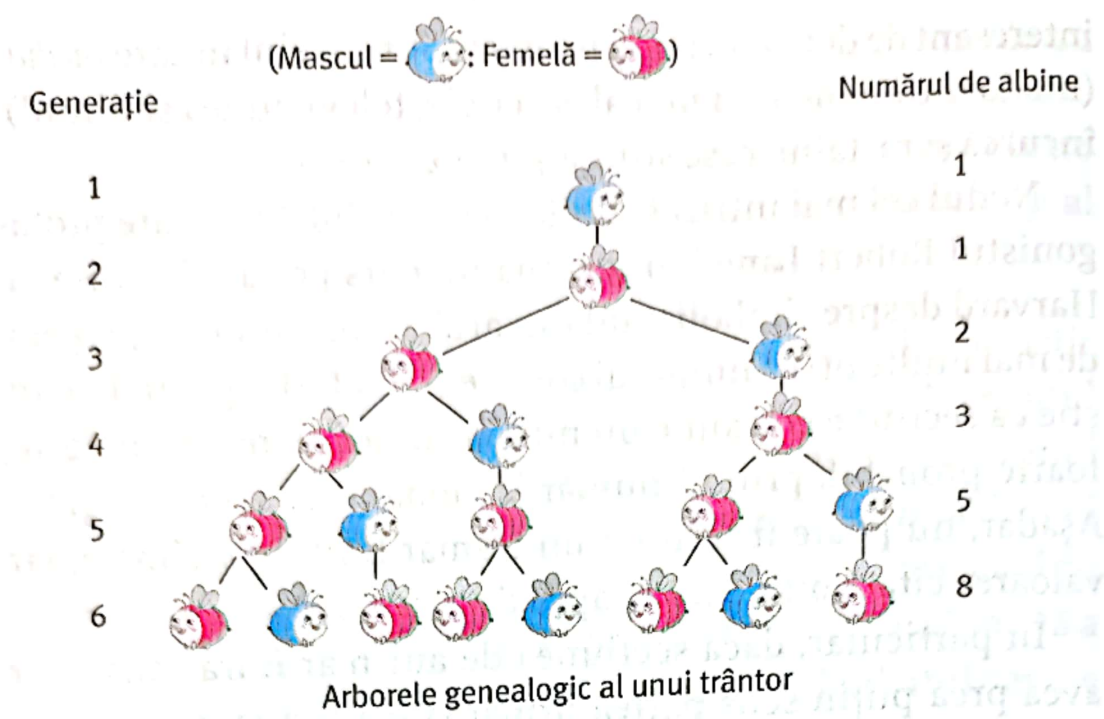
Nodul cel mai intricat se află în capitolul 20, în care protagonistul Robert Langdon rezumă un curs pe care-l ținuse la Harvard despre simbolismul din artă. În primul rând, repetă de mai multe ori că numărul ϕ este egal cu 1,618, părând să nu știe că secțiunea de aur e un număr irațional: mai mult, este, foarte probabil, primul număr irațional descoperit de greci. Așadar, nu poate fi scris cu un număr finit de zecimale, iar valoarea citată nu e decât o aproximație a sa.

În particular, dacă secțiunea de aur n-ar fi irațională, ar avea prea puțin sens partea următoare a lecției, cea în care profesorul explică imperturbabil că

Numărul ϕ deriva din șirul lui Fibonacci, o progresie faimoasă nu numai pentru că suma oricăror doi termeni adiacenți e egală cu termenul succesiv, ci și pentru că raportul a două numere adiacente tinde, în mod surprinzător, la valoarea 1,618.

Aici, definiția șirului lui Fibonacci e corectă, iar primii săi termeni 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 sunt scriși fără vreo ordine manifestă pe dalele de lângă cadavrul cu care se deschide romanul, dar nu e adevărat că raportul termenilor consecutivi ai șirului tinde la 1,618. Tinde, în schimb, la valoarea corectă a numărului ϕ , furnizând aproximații din ce în ce mai bune: altfel spus, $3/2$, $8/5$, $21/13$ etc. aproximează ϕ prin lipsă, iar 2 , $5/3$, $13/8$ etc. îl aproximează prin adaos.

Langdon își continuă lecția spunând: „Dacă în orice stup luăm numărul femelelor și îl împărțim la numărul masculilor, obținem întotdeauna același număr ϕ .” Spusă astfel, afirmația n-are nici un sens, pentru că într-un stup femelele sunt o regină (fecundă) și mii de muncitoare (sterile), față de câțiva trântori masculi.



Dar cum trântorii descind dintr-un ou nefecundat și au doar mamă, în timp ce albinele femele descind din ouă fecundate, având și mamă, și tată, rezultă că numerele din șirul lui Fibonacci corespund albinelor care se află pe diferitele niveluri ale arborelui genealogic al unui trântor. Pe primul nivel e doar trântorul (1). Pe al doilea, doar mama sa (1). Pe al treilea, bunicul și bunica materni (2). Pe al patrulea, străbunica paternă și cei doi străbunici materni (3). Pe al cincilea, cei doi străstrăbunici paterni și cei trei materni (5) și așa mai departe.

Acum, pe fiecare nivel al arborelui, numărul de masculi și numărul de femele sunt două numere consecutive din șirul lui Fibonacci, așadar raportul dintre femele și masculi tinde la ϕ . Dar albinele femele considerate în arborele genealogic trebuie să fie, evident, toate fertile, în timp ce în stup se întâmplă exact pe dos: toate femelele sunt sterile, cu excepția reginei.

Întorcându-ne la cadavrul de la începutul cărții, acesta are crestată pe burtă steaua pitagorică, iar brațele și picioarele îi sunt desfăcute, imitând *Omul vitruvian* al lui Leonardo.¹ În lecția sa, Langdon spune că „steaua pitagorică e expresia extremă

1. Vezi secțiunea „Proporția divină“.



Scenă din filmul *Codul lui Da Vinci* (2006)

a proporției divine“, aici având dreptate: nu doar pentru că se obține din diagonalele unui pentagon regulat, aflate în raportul de aur cu laturile, dar și pentru că cele cinci triunghiuri isoscele formate de vârfurile steii pitagorice au și ele latura și baza în raport de aur.

Langdon adaugă însă că „Leonardo a fost primul care a arătat că trupul uman e literalmente constituit din elemente care stau unul față de altul în raportul ϕ “, iar aici greșește: dacă nu pentru altceva, măcar pentru că nu există trupul uman, fiecare om avându-și propriile proporții. Dar nici omul vitruvian al lui Leonardo nu are proporția de aur, în ciuda legendei alimentate de-acum și de Dan Brown. Legendă care derivă din obsesia de a căuta peste tot proporția de aur, de pe fațada Partenonului până la spirala unui Nautilus, ca să nu mai vorbim despre *Mona Lisa* lui Leonardo, când, în realitate, e vorba numai despre aproximații vagi, încă și mai imprecise decât faimosul 1,618.

REPREZENTARE

MUZICĂ IRAȚIONALĂ

Temperamentul lui Archytas

Lucrările clasice despre viața lui Pitagora sunt cele ale lui Diogene Laerțiu, Porfir și Iamblichos, scrise, în această ordine, între secolele al treilea și al patrulea al erei noastre: adică șapte sau opt sute de ani după consumarea presupuselor evenimente atribuite protagonistului. Și nici unul dintre ei nu face distincția între ceea ce poate să aparțină chiar maestrului, și ce ar trebui atribuit mai degrabă discipolilor săi din prima, a doua sau a treia generație, în particular lui Hipassos din Metapont, lui Filolaos din Crotona sau lui Archytas din Tarent.

Din ce s-a putut reface la distanță de milenii, se pare că singura descoperire a lui Pitagora însuși e o schiță a teoriei matematice a muzicii: în particular, atribuirea rapoartelor numerice $2/1$ și $3/2$ celor două rapoarte armonice de octavă și de cvintă. Ceea ce înseamnă, de pildă, că, dacă o coardă a viorii e de două ori mai lungă decât o alta, atunci notele pe care le vor scoate vor fi la distanță de o octavă, ca doi do consecutivi. În schimb, dacă o coardă e o dată și jumătate cât cealaltă, atunci notele se vor auzi la distanță de o cvintă, ca un sol și un do consecutive.

Restul gândirii pitagorice ar trebui însă subîmpărțit după cum urmează. Lui Hipassos, descoperirea dodecaedrului și a primului număr irațional: probabil secțiunea de aur, care

apare în proporțiile pentagonului și ale dodecaedrului. Lui Filolaos, teoriile descrise în dialogul *Timaios* al lui Platon: în particular, corespondența dintre elemente și poliedre regulate, faimoasa „armonie a sferelor”, obținută aplicând planetelor legile muzicale, ideea unui foc central în univers și a mișcării Pământului în jurul său. Iar lui Archytas, care a fost sursa pitagorică a lui Platon, pe care l-a și întâlnit la Tarent, completarea teoriei muzicale și aplicațiile matematicii în politică, dincolo de introducerea primului curs de studii cvadripartit care va deveni ulterior *cvadripartit*: aritmetică, geometrie, astronomie și muzică.

În particular, Archytas a atribuit rapoarte numerice tuturor rapoartelor armonice din scara heptatonică, înțelegând că legătura dintre primele și ultimele e de natură logaritmică: dacă vrem să adunăm ori să scădem rapoartele armonice, trebuie să înmulțim, respectiv să împărțim rapoartele lor numerice. De exemplu, din moment ce două cvinte (do-sol și sol-re) corespund numeric lui $9/4$ și muzical unei octave plus un ton, scăzând o octavă se obține $9/4 : 2 = 9/8$, ca raportul unui ton (do-re).

Înmulțind și împărțind în diferite moduri rapoartele obținute pe rând, Archytas a reușit să atribuie fiecărei note a scării muzicale o fracție corespunzătoare: în particular, $9/8$ pentru cele cinci tonuri (do-re-mi și fa-sol-la-si) și $256/143$ celor două semitonuri (mi-fa și si-do). A observat însă că apare o problemă la acestea din urmă, pentru că, fiind vorba despre semitonuri, ar fi trebuit să corespundă și rădăcinii pătrate a lui $9/8$ care, fiind un număr irațional, nu poate coincide cu $256/143$.

De fapt, problema se află chiar la originea sistemului pitagoric, pentru că octava și cvinta pe care se bazează sunt incommensurabile între ele, adică nu au multipli comuni întregi: altfel spus, ținând seama de corespondența logaritmică despre care am vorbit, numărul la care ar trebui ridicat 2 pentru a obține $3/2$, anume logaritmul în baza 2 al lui 3 din care scădem 1, nu e rațional (o aproximație a sa e 0,585). Și cum demonstrația

iraționalității sale e, poate, cel mai simplu dintre argumentele de felul acesta, merită s-o reamintim.

Evident, e suficient să demonstrăm că *logaritmul lui 3 în baza 2 e irațional*. Presupunând, prin absurd, că ar fi rațional, fie el egal cu m/n pentru un m și un n întregi. Atunci, din definiția logaritmului, ar rezulta că 2 ridicat la puterea m/n e egal cu 3, și deci că 2^m este egal cu 3^n , lucru imposibil, deoarece 2 este par, iar 3 este impar.

Așadar, raportul dintre octavă și cvintă nu poate fi decât aproximat: de exemplu, 7 octave sunt aproximativ egale cu 12 cvinte, cu o mică eroare numită *virgulă pitagorică*. Cum însă problema nu se poate rezolva rațional, Archytas a decis să adopte soluția irațională naturală: a împărțit octava în douăsprezece semitonuri egale, fiecare egal cu *rădăcina de ordinul doisprezece a lui 2*, anticipând astfel așa-numita *temperare egală* (producând *gama temperată*) care va fi adoptată abia peste două mii de ani, dovadă a vizionarismului său matematico-muzical.

LUMEA AȘA CUM O VEDEM

Perspectiva lui Giotto

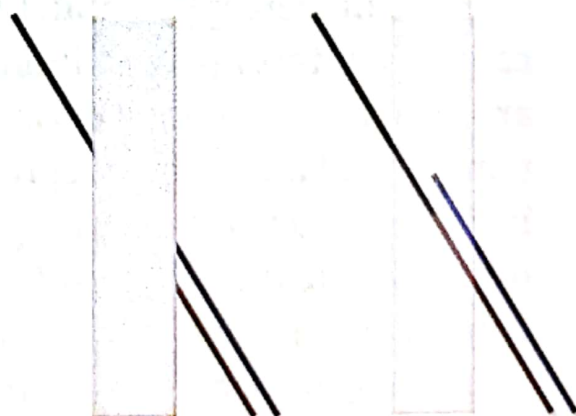
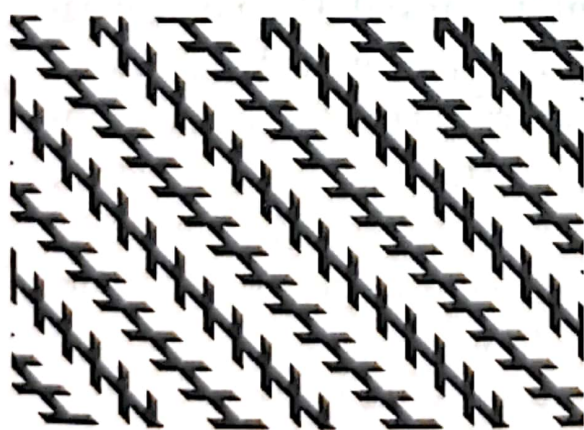
În *Critica rațiunii pure* (1781), Immanuel Kant susținea că geometria euclidiană este un *a priori* al percepției noastre, în sensul că obiectele din lumea înconjurătoare ne apar ca fiind înzestrate cu întindere spațială nu pentru că ar fi astfel, ci pentru că structura simțurilor noastre și a minții noastre ne face să le percepem astfel.

Matematicienii și-au pus încă din secolul XIX întrebări despre consecințele pe care o asemenea concepție despre spațiu le-ar putea avea pentru activitatea lor. Într-adevăr, dacă Immanuel Kant ar fi avut dreptate, atunci geometria euclidiană ar fi trebuit să fie o premisă, o presuposiție a cunoașterii noastre despre lume, în loc să-i fie consecință, și ar fi trebuit exclusă chiar și simpla imagine a unei geometrii neeuclidiene. Gauss

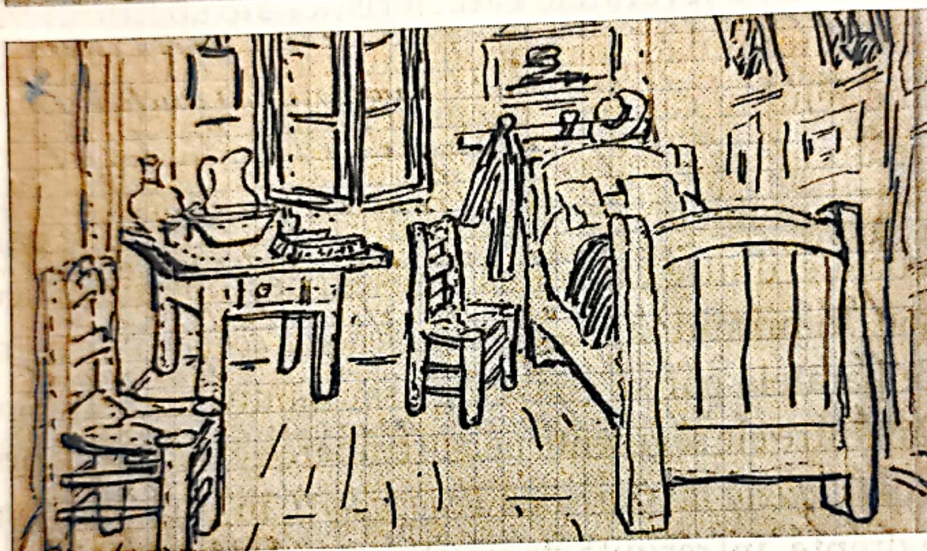
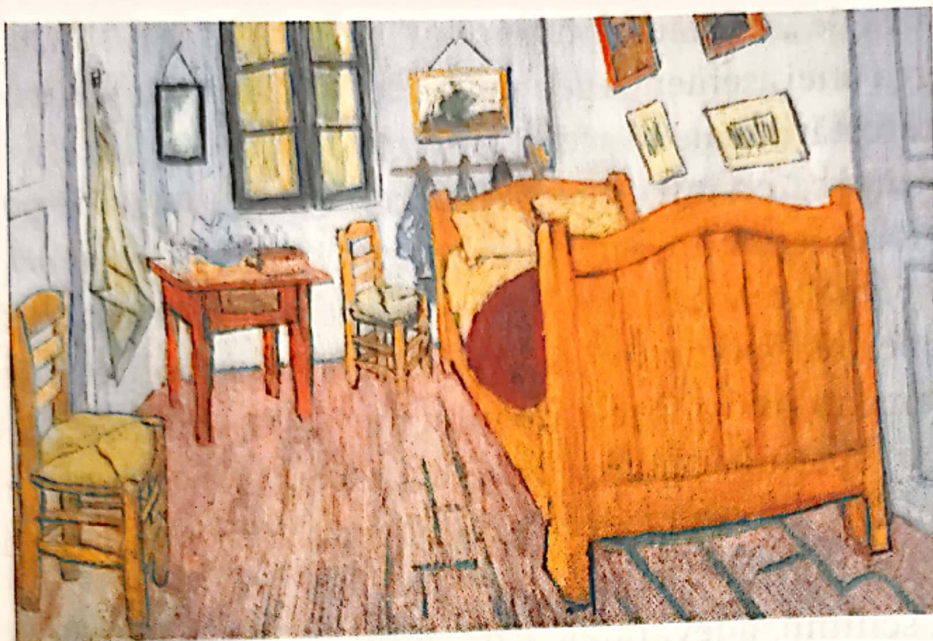
se temea de „strigătele beoțienilor“ pe care le-ar fi stârnit propunerea unei asemenea geometrii, ceea ce l-a făcut să nu comunice cercetările sale în această direcție.

Primul care a înfruntat direct problema geometriei percepției a fost Hermann von Helmholtz, în studiul *Despre originea și semnificația axiomelor geometriei*.¹ Concluzia sa a fost că, după descoperirea geometriei sferice și a celei hiperbolice, filozofia lui Kant nu putea fi salvată integral: chiar voind să păstrezi ideea că spațiul ar fi un *a priori* al percepției noastre, trebuia renunțat la ipoteza că el ar fi obligat să aibă, cu necesitate, caracteristici euclidiene.

În schimb, adevăratele caracteristici ale spațiului vizual trebuiau determinate în manieră experimentală: în particular, studiind felul în care percepem dreptele paralele, și pe care anume drepte le percepem drept paralele. Că subiectul era presărat cu probleme înțelegem dintr-o lungă serie de paradoxuri vizuale, dintre care două fuseseră descoperite în același an 1860. În primul rând, *iluzia lui Johann Zöllner*, în care două drepte paralele par să converge sau să diverge după cum inserăm între ele segmente perturbatoare verticale sau orizontale. Apoi, *iluzia lui Christian Poggendorff*, în care părțile unei unice drepte, întreruptă de unul sau mai multe spații goale, ne apar ca drepte paralele distincte.



1. *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrische Axiome*, Heidelberg, 1870.



Camera din Arles, de Van Gogh, tabloul și schița

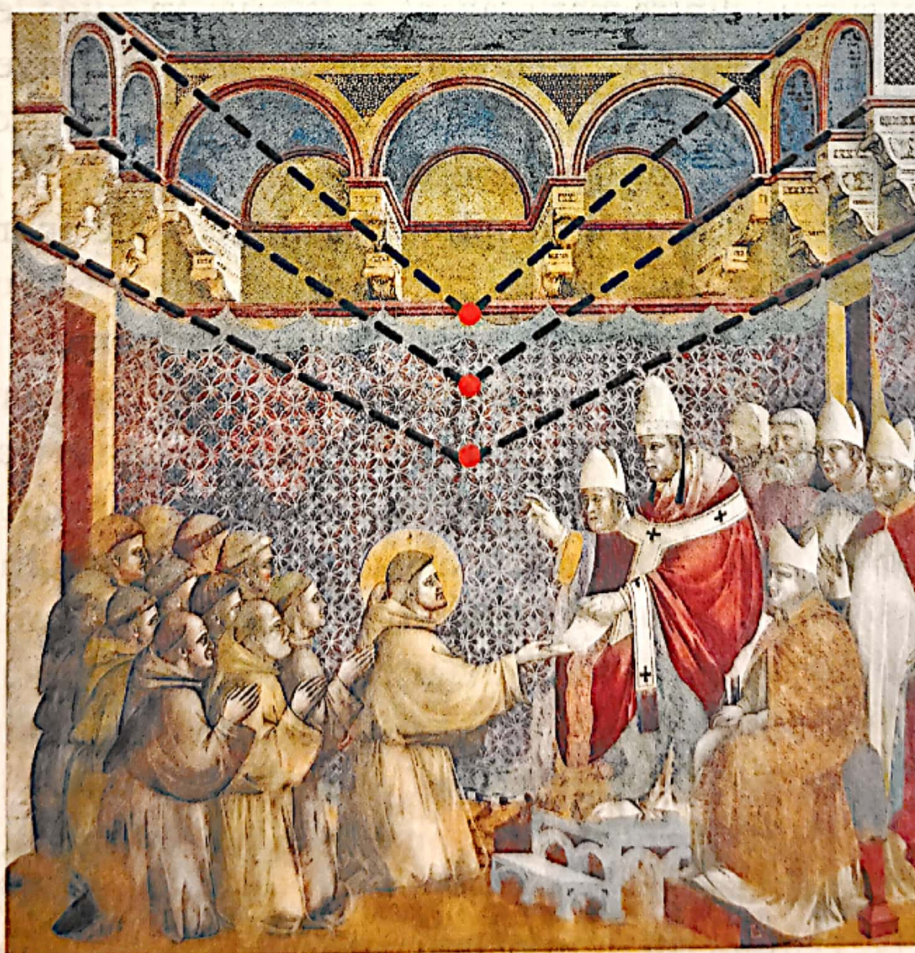
Evident, percepția paralelismului e instabilă și poate fi păcălită ușor: totul pare să indice că e o percepție dobândită și artificială, mai degrabă decât înăscută și naturală. Ce se întâmplă când încercăm să reprezentăm lumea așa cum o vedem, înainte să aducem corecții cognitive la ceea ce vedem, ne arată o comparație între tabloul *Camera din Arles*, pictat în 1888 de Van Gogh, și perspectiva sa „corectă”.

Dacă opera aceasta a părut surprinzătoare atunci, și continuă să apară astfel și azi, este pentru că a fost concepută într-o perioadă în care perspectiva clasică se impusese de-acum ca o paradigmă culturală, una rămasă în vigoare până azi. Înainte

de Renaștere, în schimb, era un lucru obișnuit să se reprezinte ca linii curbe liniile pe care perspectiva le-ar fi cerut reprezentate ca drepte.

În arta greacă și romană, de exemplu, obiectele erau desenate conform regulilor *Opticii* euclidiene. Anume, ca și cum ar fi fost proiectate nu pe un plan perpendicular pe direcția privirii, ci pe o sferă având în centru ochiul privitorului. În particular, dimensiunile lor erau proporționale cu unghiul subîntins față de ochi, și nu cu distanța față de observator.

Ca să proiectezi obiecte pe o sferă și nu pe un plan e nevoie de o adevărată schimbare de perspectivă. Într-adevăr, unicul punct de fugă al perspectivei centrale e înlocuit cu o întreagă *axă de fugă* a unei *perspective axiale*. Iar dreptele ortogonale, în loc să convergă rectiliniu în punctul de fugă, se apropie asimptotic de axa de fugă.



Confirmarea regulii, de Giotto

Tehnica aceasta antică a fost redescoperită în Evul Mediu, fiind folosită mai mult sau mai puțin conștient de Giotto și de Duccio di Boninsegna: de exemplu, în *Confirmarea regulii* (circa 1295) din Assisi și în *Cina cea de taină* (circa 1305), la Padova, ale primului, și în *Cina cea de taină* (circa 1310), din Siena, a celui de-al doilea. Abia în Renaștere a fost înlocuită cu perspectiva cu care suntem obișnuiți, care a devenit tehnica de reprezentare clasică. Dovadă a faptului că percepția noastră spațială nu e doar biologic înnăscută, ci și construită cultural.

PROPORȚIA DIVINĂ

Desenele lui Leonardo

Leonardo da Vinci a fost unul dintre marii artiști ai Renașterii, dar nu și unul dintre marii savanți ai istoriei, în ciuda legendarei sale hagiografii care-l prezintă drept un geniu universal. Confuzia se datorează faptului că celebrele sale manuscrise sunt înțesate cu notițe enciclopedice și schițe fanteziste, prea adesea interpretate în mod optimist ca proiecte ale unor mașinării ale viitorului.

Cel mai cunoscut dintre aceste desene, foarte imitat și reprodus chiar pe moneda noastră de un euro, este așa-numitul *Om vitruvian*, căruia chiar numele îi trădează originile clasice. Într-adevăr, către 1490, Leonardo a intrat în contact cu Francesco di Giorgio Martini, care i-a arătat propriile sale studii după tratatul *De architettura* al lui Vitruviu. Desenul lui Leonardo se inspiră tocmai dintr-un fragment al acestui tratat, care pune în legătură proporțiile omului cu pătratul și cu cercul, simboluri ale Pământului și, respectiv, Cerului.

Notele scrise de mână de Leonardo în jurul desenului descriu detaliat aceste proporții. Centrul pătratului se află în organele genitale, în timp ce latura e egală și cu înălțimea, și cu deschiderea brațelor. Centrul cercului e plasat în buric, în



Omul vitruvian, al lui Leonardo

timp ce circumferința e determinată fie de brațele deschise la înălțimea capului, fie de picioarele deschise așa încât să formeze un triunghi echilateral. Poziția piciorului stâng, paralelă cu corpul, în mod surprinzător, și o umflătură la nivelul zonei inghinale indică, poate, prezența unei hernii la modelul folosit de Leonardo.

Se vede și cu ochiul liber că pătratul și cercul nu au aceeași arie, pentru că latura pătratului e prea scurtă: așadar, desenul nu poate sugera o soluție a cuadraturii cercului, cum se fabulează adesea. Latura pătratului nu e nici legată de raza cercului în proporția de aur, de data asta pentru că e prea lungă. Mai precis, față de raza cercului, latura pătratului e de 1,566 ori mai lungă, or, pentru secțiunea de aur, ar trebui să fie de 1,618 ori mai lungă, și 1,772 (rădăcina pătrată a lui π) pentru cuadratură.

Cine vrea să găsească la Leonardo referiri la secțiunea de aur trebuie să le caute acolo unde există: adică în celebrele ilustrații pentru cartea *Proporția divină* a lui Luca Pacioli, din care existau trei ediții manuscrise, datate 1497. Prima îi aparține lui Ludovico di Moro, căruia îi era dedicată opera, și se păstrează la Biblioteca Universitară din Geneva. A doua, oferită în dar lui Galeazzo Sanseverino, rudă a ducelui și prieten cu Leonardo, se găsește la Biblioteca Ambrosiana din Milano. A treia, dăruită lui Pier Soderini, gonfalonier din Florența, s-a pierdut. Cartea lui Pacioli s-a tipărit la Veneția în 1509, conținând, în afară de tratatul despre secțiunea de aur, o lucrare despre arhitectură inspirată din Vitruviu și o copie a *Cărții despre cele cinci corpuri regulate* (circa 1490), de Piero della Francesca.

Cele șaiszeci de ilustrații în culori ale lui Leonardo constituie tot atâtea exerciții de perspectivă: tehnică introdusă cu un secol în urmă de Brunelleschi și ilustrată de Piero della Francesca în tratatul *De prospectiva pingendi* (1482). Și Leonardo a folosit-o cu măiestrie în două tablouri ale sale: *Cina cea de taină* (1495–1498), comisionat de Ludovico il Moro și databil din aceiași ani cu ilustrațiile la cartea lui Pacioli, și *Adorarea magilor* (1481–1482), cam cu cincisprezece ani înainte, lăsat



Cina cea de taină, de Leonardo



Două ilustrații ale lui Leonardo pentru *Proporția divină*

neterminat. Ambele tablouri sunt organizate conform unei perspective centrale cu un unic punct de fugă situat în figura lui Isus și a Fecioarei.

În schimb, ilustrațiile pentru Luca Pacioli sunt mai aseptice și reprezintă corpuri mai mult sau mai puțin regulate contrapuse unul altuia în diferite moduri: pline sau schelet numai, întreg sau trunchiat, normal sau stelat. Uneori reprezentările sunt mai strâmbe și chiar greșite: eroarea cea mai subtilă apare la dodecaedrul trunchiat stelat, în care o piramidă pentagonală și cele cinci piramide triunghiulare din jurul ei (corespunzând, respectiv, unei fețe a dodecaedrului și celor cinci vârfuri ale sale trunchiate) sunt reprezentate cu vârfurile în același plan, pe când vârful piramidei centrale ar trebui să iasă din planul determinat de celelalte cinci.

Nu-i de mirare că artistul Leonardo, nu prea versat în matematică, a comis această eroare: în caietele sale abundă într-adevăr calculele greșite, unele chiar elementare. Uimește însă faptul că matematicianul Pacioli a greșit atât de tare,

poate păcălit de un model aproximativ: dacă ar fi urmat calculele precise, nu tocmai dificile, și-ar fi dat seama. Ceea ce n-ar fi sporit interesul oricum enorm pentru cartea sa și pentru ilustrațiile lui Leonardo, azi ușor de găsit în diverse reproduceri.¹

ȘCOALA DIN ATENA

Camerele lui Rafael

Rafael, de la moartea căruia s-au împlinit cinci sute de ani în 2020, e unul dintre cei mai reprezentativi artiști ai Renașterii care și-a lăsat amprenta la Vatican.

Publicul însă nu poate vedea una dintre capodoperele sale, anume frescele din *logiile lui Rafael* din Palatul Apostolic, dispuse pe tot atâtea etaje. Plafoanele celei de-a doua logii, pe etajul apartamentului papal, conțin așa-numita *Biblia lui Rafael* (1518–1519): o serie de 52 de tablouri, câte patru pentru fiecare dintre cele treisprezece arcade, care se constituie într-un fel de răspuns la cele 33 de tablouri ale lui Michelangelo pe plafonul Capelei Sixtine, realizată cu câțiva ani înainte.

Din fericire, sunt deschise publicului cele patru *Camere ale lui Rafael*, care fac parte din Muzeele Vaticanului. În camera numită „*Stanza della Segnatura*”, în care s-a întrunit Tribunalul Sfântului Scaun în timpul papei Iuliu II, cel care a și comisionat lucrarea, se află celebra *Școala din Atena* (1511), în care Rafael fotografiază în felul său un instantaneu al filozofiei și științei grecești.

Dincolo de personaje, opera e interesantă și prin absențe: în primul rând, aceea a lui Crisip, alături de Platon și Aristotel, dat fiind că respectivele lor școli (Stoà, Academia și Liceul) erau vârfurile triumfului filozofic atenian. Absența stoicilor e însă firească într-o lucrare comisionată de Biserica de-atunci,

1. Luca Pacioli, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci, *Antologia della Divina Proporzione*, Aboca, 2010.



Școala din Atena a lui Rafael

pentru că ei reprezentaseră un fel de alternativă raționalistă și cultă a religiei creștine. Mai puțin evidentă pentru noi, cei de azi, e absența lui Arhimede, cel mai mare matematician și savant al Antichității: fapt e că operele lui se pierduseră și nici chiar Dante nu-l plasează în Limb, printre celelalte mari spirite precreștine.

În realitate, și Dante, și Rafael se mărginesc să-i comemoreze, dintre oamenii de știință, pe Thales din Milet, pe Pitagora, pe Euclid și pe Ptolemeu. Oricum, puțini, dar buni, s-ar putea spune, iar în *Școala din Atena* ei chiar sunt în prim-plan și în mare activitate. Pitagora, de exemplu, tocmai scrie o carte, în timp ce un elev al lui îi arată lui Averroes o tăbliță pe care rezumă teoria



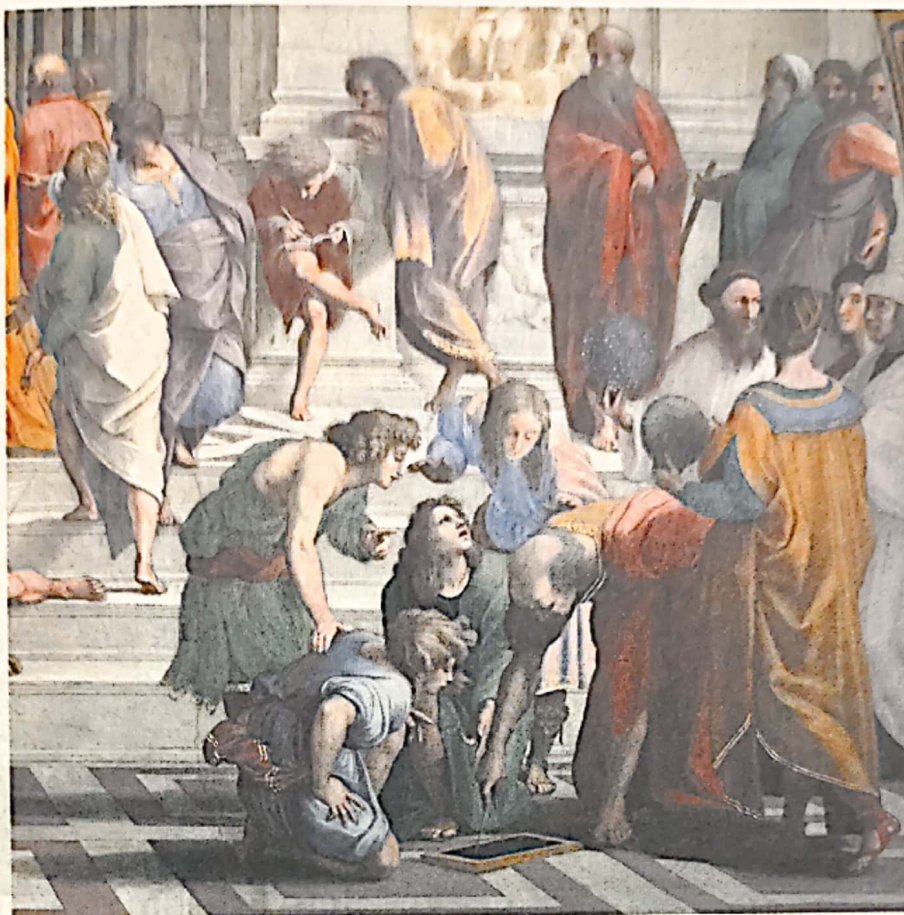
Pitagora în Școala din Atena
și detaliu al tăbliței



muzicală pitagoreică.¹ În josul tăbliței se vede *tetrachtys*-ul, construit pe numerele 1, 2, 3 și 4. În centrul ei, se află *tetracordul*, constituit din acordurile de unison, cvartă, cvintă și octavă, reprezentate la rândul lor de rapoartele dintre 6, 8, 9 și 12. Iar sus e scris *epogdoon*, care indică tonul pitagoric, descris de raportul dintre 8 și 9.

Euclid, cu trăsăturile lui Bramante, e înconjurat de elevi și aplecat ca să deseneze cu compasul, pe o tăbliță pusă pe jos, *Sigiliul lui Solomon*, sau *Steaua lui David* (o intersecție de două triunghiuri echilaterale), în interiorul căruia stă un dreptunghi pitagoric (egal cu două pătrate) cu diagonala sa. Ptolemeu ține în mână un glob terestru și discută cu Zoroastru, care ține un glob ceresc. Thales poate fi recunoscut după bastonul care, conform legendei, i-a folosit la măsurarea înălțimii mării piramide comparând-o cu umbra ei.

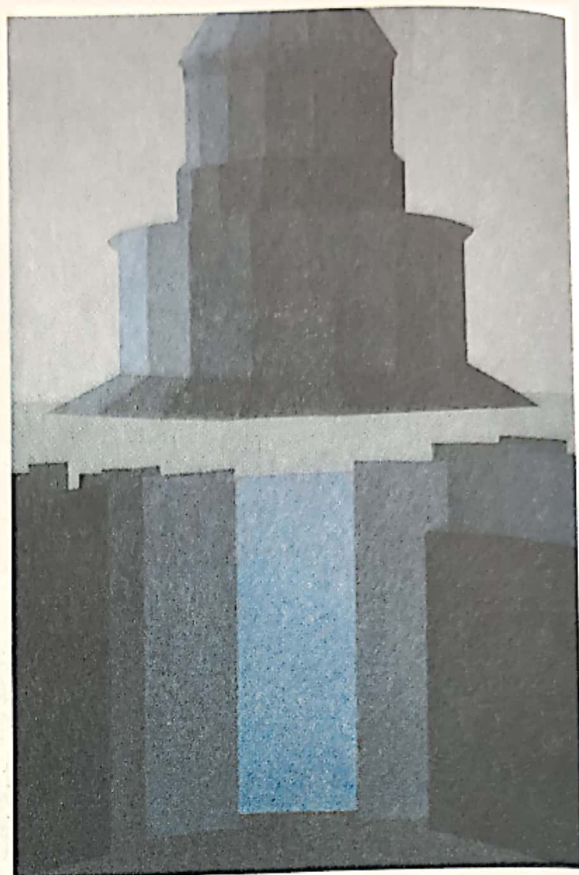
1. Vezi secțiunea „Muzică irațională“.



Thales, Euclid și Ptolemeu în Școala din Atena

În timp ce puținii savanți din primul plan al Școlii din Atena lucrează, numeroșii filozofi din fundal stau de vorbă împărțiți în grupuri. În centru stau Platon, care aduce cu Leonardo, și Aristotel: într-un fel de anticipare a maximei finale din *Critica rațiunii practice* (1788) a lui Kant, primul arată cu degetul către cerul înstelat de deasupra noastră, la care se referă dialogul său *Timaios*, în timp ce al doilea arată cu mâna în jos, către legea morală din noi, codificată în *Etica* sa. Alegorie a faptului că, așa cum spunea Coleridge, „toți oamenii se nasc ori platonicieni, ori aristotelicieni”, întreaga compoziție are un unic punct de fugă, situat între cei doi.

Cât despre pictori, ei se nasc figurativi ori geometrici, iar Școala din Atena exemplifică și conjugă ambele tendințe în cele două jumătăți orizontale ale sale: portretistică în cea inferioară, arhitecturală în cea superioară. Dar la fel se întâmplă și în ne-numărate alte lucrări, fie ale aceleiași perioade, ori ale aceluiași



Nunta Fecioarei a lui Rafael și *Piramida și templul* (detaliu) a lui Lucio Saffaro

autor: celebra *Nunta Fecioarei* (1554), de exemplu, prima pânză datată și semnată de Rafael, inspirată din tabloul omonim și aproape contemporan al lui Perugino, și condensată de Lucio Saffaro în *Piramida și templul* (1984), în care din edificii rămân doar proporțiile, iar din figuri doar volumele stilizate în dreptunghiuri, parcă pentru a epura lucrarea lui Rafael de tot ce e superfluu și a lăsa numai ce e necesar.

JOCURI DE OGLINZI

Un truc al lui Manet

Așa cum se vede și din faptul că însuși Euclid s-a ostenit să scrie un tratat de *Optică*, legile reflexiei aparțin matematicii și fizicii. Dar și arta le-a folosit, mai mult sau mai puțin conștient,

în manieră memorabilă. Iar modul cel mai simplu în care pot fi folosite e prin felul în care pictorii au tratat oglinzile.

De exemplu, o mărturie despre Caravaggio a biografului pictorilor din epocă, Giovanni Baglione, amintește „tablouașele pictate de el în oglindă”: în particular, *Il Bacchino malato* (1593).^{*} Știm și că fresca *Jupiter, Neptun și Pluto* (1597), singura sa pictură murală, a fost realizată de pictor reflectându-se dezbrăcat într-o oglindă plasată deasupra schelelor. De altfel, un inventar al obiectelor sale personale din 1605 înregistra „o oglindă mare și un scut cu oglindă”.

Dincolo de utilizarea sa banală, pentru autoportrete, oglinda a fost folosită în pictură și în mod mai sofisticat: pentru a oferi o privire în urmă care s-o completeze pe aceea spre înainte a pictorului și a privitorului. *Las Meninas* (1656), de Diego Velázquez, folosește magistral ambele artificii: unul pentru a se înfățișa pe sine în acțiune, celălalt pentru a arăta că, de fapt, pictează perechea regală care nu se vede în scenă. Cât despre protagonistele aparente ale tabloului, ele sunt cele ce privesc, mai mult chiar decât pictorul ori privitorul exterior, perechea regală din afara scenei. În acest literal joc de oglinzi, pictorul se dedublează, înăuntrul și în afara tabloului, în timp ce privitorul exterior se confundă cu perechea regală, deci cu adevăratul subiect al tabloului.

În 1648, cu câțiva ani înainte de *Las Meninas*, în *Afrodita și Cupidon*, Velázquez folosește o iluzie de perspectivă numită *efectul Afrodita*, populară deja printre greci și romani, reintrodusă în Europa de Tițian în *Afrodita la oglindă* (1555). Iluzia constă în faptul că, în realitate, Afrodita nu se uită în oglindă, așa cum, naiv, am putea crede, ci își îndreaptă privirea către ochii privitorului reflectat care, la rândul lui, îi poate întoarce privirea. Efectul e utilizat și în cinematografie, permițându-i spectatorului să

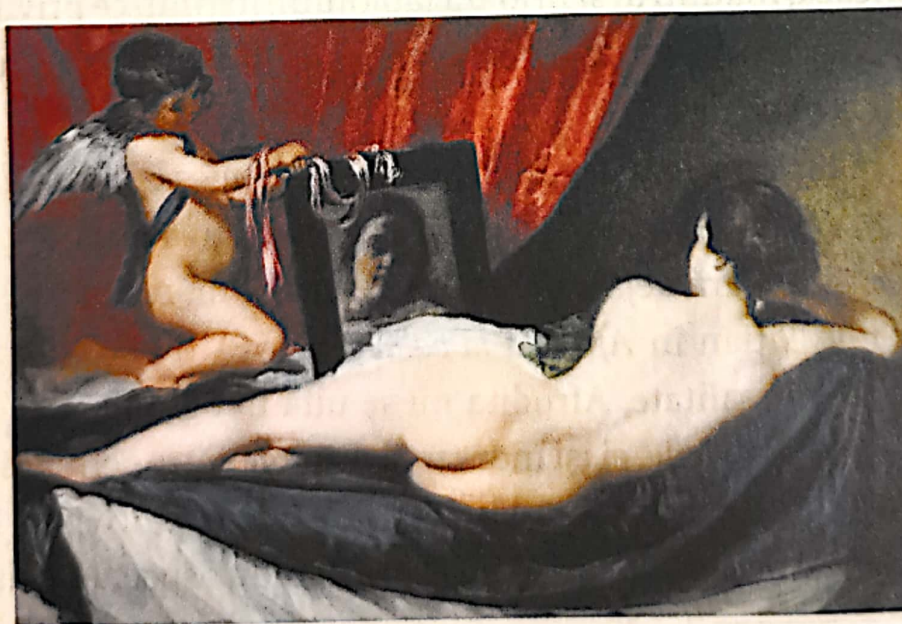
^{*} *Bachus bolnav*, cunoscut și ca *Autoportret ca Bachus* (n. tr.).



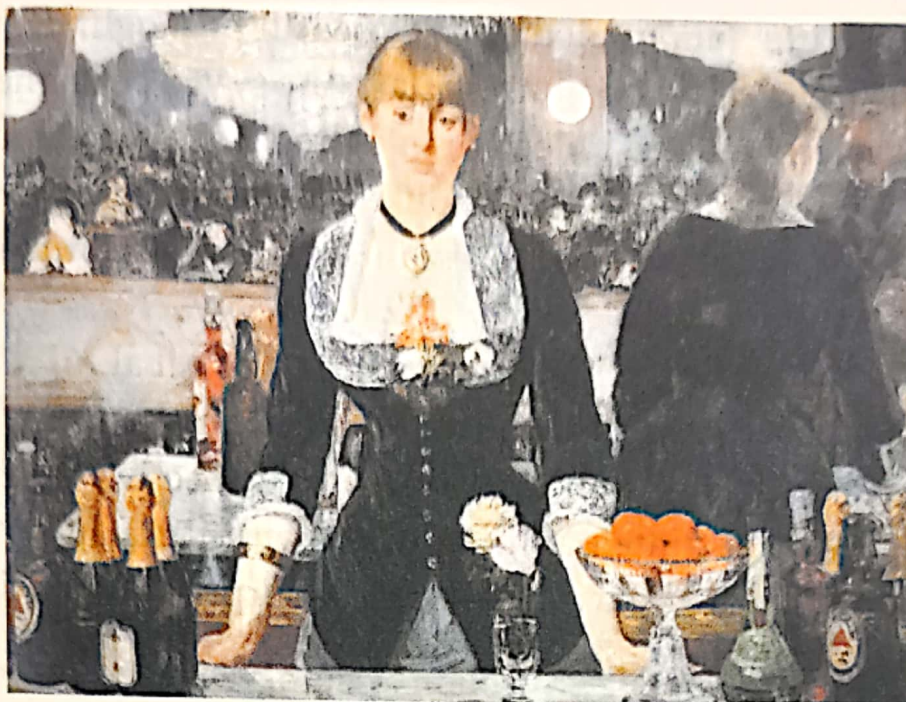
Las Meninas, de Velásquez

vădă un actor reflectat în oglindă, dându-i iluzia că acela se uită în oglindă, în timp ce el, de fapt, se uită în altă parte.

Acest du-te-vino de puncte de vedere provocat de pozițiile reciproce ale privitorului, subiectului și oglinzilor ne poate încurca până la urmă. E cazul tabloului *Un bar la Folies Bergères*, de Edouard Manet (1882), care a fost multă vreme considerat o uriașă eroare de perspectivă, din pricina imposibilității de a



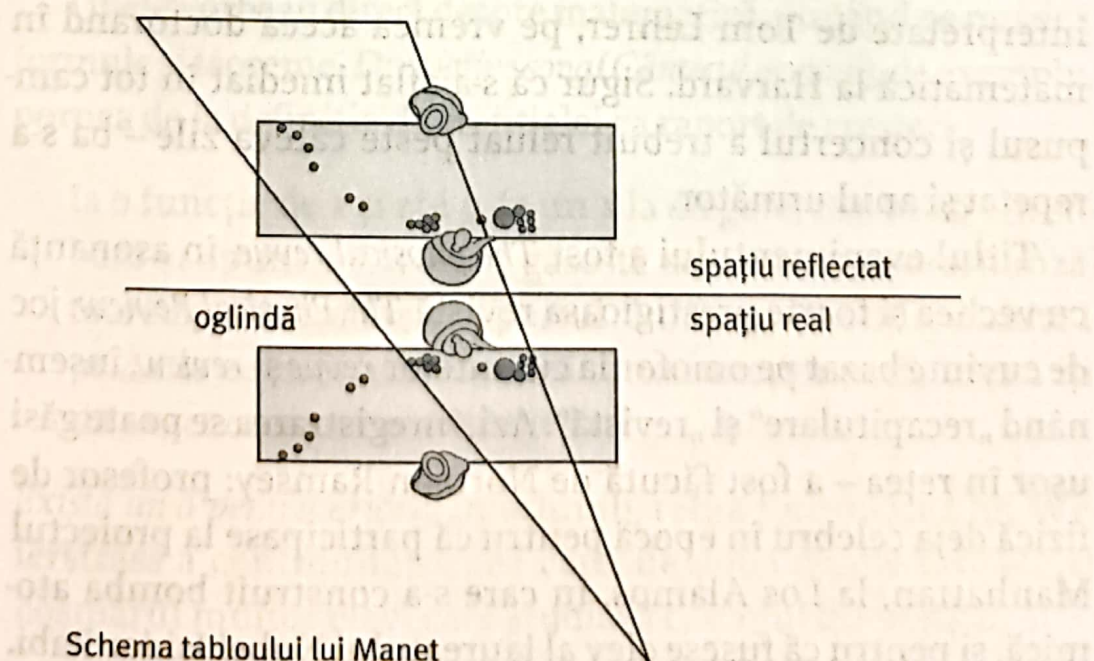
Afrodita și Cupidon, de Velásquez



Un bar la Folies Bergères, de Manet

împăca poziția frontală a fetei de la bar și a clientului cu reflexia lor laterală.

În 2001, însă, într-o teză de doctorat despre *Ambiguitatea și iluzia spațială în tablourile lui Manet*, Malcolm Park a descoperit că, de fapt, scena e observată din lateral, și nu din față. Fata de la bar și clientul nu se privesc întâmplător, ci se uită amândoi



Schema tabloului lui Manet

către privitor: fata în mod direct, clientul prin oglindă. Ca și cum asta n-ar fi fost de ajuns, sticlele care se văd pe tejghea nu sunt aceleași cu cele reflectate în oglindă: acestea din urmă totuși sunt în mod pervers dispuse așa încât să pară că sunt cele care se văd și pe tejghea, ca să întărească iluzia unui punct de observație frontal.

Chiar și aceste puține exemple, mai ales cel al lui Manet, arată că a avea cunoștințe de matematică, în particular a ști câte ceva despre legile reflexiei și despre perspectivă, e esențial nu doar pentru științele aplicate, dar și pentru artă: lucru bine știut de unii pictori, dar care poate părea surprinzător criticilor și privitorilor.

CONCERT MATEMATIC

Cântecele lui Lehrer

În 1950, la Harvard, la sfârșitul primului semestru, un profesor a anunțat că ultimul curs va fi o recapitulare pentru examen. Spre marea surpriză a studenților, a fost însă vorba despre un concert cu cântece inspirate de fizică și matematică, scrise și interpretate de Tom Lehrer, pe vremea aceea doctorand în matematică la Harvard. Sigur că s-a aflat imediat în tot campusul și concertul a trebuit reluat peste câteva zile – ba s-a repetat și anul următor.

Titlul evenimentului a fost *The physical revue*, în asonanță cu vechea și foarte prestigioasă revistă *The Physical Review*: joc de cuvinte bazat pe omofonia cuvintelor *revue* și *review*, însemnând „recapitulare” și „revistă”. Azi, înregistrarea se poate găsi ușor în rețea – a fost făcută de Norman Ramsey: profesor de fizică deja celebru în epocă pentru că participase la proiectul Manhattan, la Los Alamos, în care s-a construit bomba atomică, și pentru că fusese elev al laureatului Nobel Isidor Rabi.

În 1989, Ramsey a primit el însuși Premiul Nobel pentru fizică, pentru cercetările sale privind ceasurile atomice.

Cântecul cel mai cunoscut din concert, imitat de-atunci încoace *ad nauseam* în toate limbile și cu toate instrumentele, este, cu siguranță, *Elementele*. Muzica e cea din aria *I am the very model of a modern major general*, din opera *The Pirates of Penzance* (1879), de Gilbert și Sullivan: piesă deja celebră prin ea însăși, pentru că pune la grea încercare pronunția și dicția interpretului într-un text care, printre altele, vorbește și despre matematică, de la teorema lui Pitagora la calculul diferențial și integral, trecând prin ecuații pătratice și conice. Lehrer a păstrat notele și a schimbat cuvintele: într-o mostră de curaj, nu a folosit nimic altceva decât numele elementelor chimice; motiv pentru care azi cântecul e folosit în școlile anglo-saxone ca expedient mnemonic la învățarea tabelului periodic al lui Mendeleev.

Alte cântece se refereau la competiția dintre studenții de la fizică și de la alte facultăți științifice, precum cunoscutele *Nu-ți da licența-n fizică*, ori *Trăiască chimia*. Un altul era *Fugă pentru oamenii de știință*, în care aceeași temă e reluată contrapunctic de un matematician, un fizician și un chimist, fiecare dintre ei revendicând superioritatea domeniului său asupra celorlalte, dincolo de propriul rol în construirea bombei atomice.

Unele vorbeau direct despre matematică, punând pe muzică formule și teoreme. *Derivative song* (*Cântecul derivat*), de exemplu, pornea de la definiția diferențialei ca raport de creșteri:

Ia o funcție de x și zi-i y . Ia un x la alegere, fă o mică schimbare și spune-i Δx . Apoi găsește schimbarea corespunzătoare Δy . Fă, în sfârșit, raportul și, cu mare atenție, trimite-l pe Δx la zero. Și atunci, dacă totul funcționează, limita îți dă exact ceea ce numim dy/dx .

Există un δ pentru orice ε , în schimb, relua formularea lui Weierstrass a continuității, cea care, de două secole încoace, e coșmarul multor elevi care studiază calculul diferențial:

Există un δ pentru orice ε , poți fi sigur, dar e o condiție care trebuie satisfăcută: ε să fie pozitiv, oricare altul e rău, pentru el nu există nici un δ . Ce trist, ce crud, tragic și dureros: rasismul ăsta nu e virtuos, se poate elimina cu un calcul iluminat, să fie câte-un δ pentru orice ε .

După câțiva ani a ieșit cu *New Math* (*Matematica nouă*), în care-și bate joc de învățământul modern din școlile elementare și din gimnazii, arătând diferența dintre felul cum se făcea pe vremuri scăderea lui 173 din 342, găsind rezultatul corect, și cum se face azi scăderea, greșind eventual, dar consolându-ne cu gândul că „ideea contează”. Poanta finală e calculul, într-un ritm demențial, al rezultatului în baza 8, care „e ca baza 10 dacă-ți lipsesc două degete”: pentru orice eventualitate, rezultatul e 147.

Succesul primului concert l-a făcut instantaneu celebru pe Lehrer, care s-a amuzat timp de câțiva ani să compună cântece satirice geniale, mai ales pe teme sociale și politice. A înregistrat două discuri în studio și două live, dar la începutul anilor șaptezeci s-a retras din *show business* și a revenit la universitate. Deși n-a terminat niciodată doctoratul în matematică, până în 2001 a făcut cercetare în laboratorul de la Los Alamos și a predat la MIT și la University of California. Azi, la peste nouăzeci de ani, lumea își amintește de el mai cu seamă pentru spectacolele muzicale care, din fericire, se găsesc ușor pe YouTube.

CUM IEȘIM DE-AICI?

Labirintul lui Kubrick

Unul dintre filmele horror cele mai cunoscute și memorabile este *Shining*, de Stanley Kubrick (1980), după romanul omonim al lui Stephen King (1977). S-a filmat în de-acum celebrul Stanley Hotel din Estes Park, Colorado, în apropierea Munților Stâncoși, hotel al cărui nume are legătură nu cu regizorul, ci cu fondatorul său, Freelan Stanley.

În 1974, soții King au petrecut acolo o noapte, în la fel de celebra cameră 217 din roman, devenită 237 în film, în timp ce toate celelalte camere din hotel erau goale. Nimic de mirare, doar sezonul turistic estival tocmai se încheiase, și totuși imaginația debordantă a scriitorului i-a furnizat în noaptea aceea ideea poveștii.

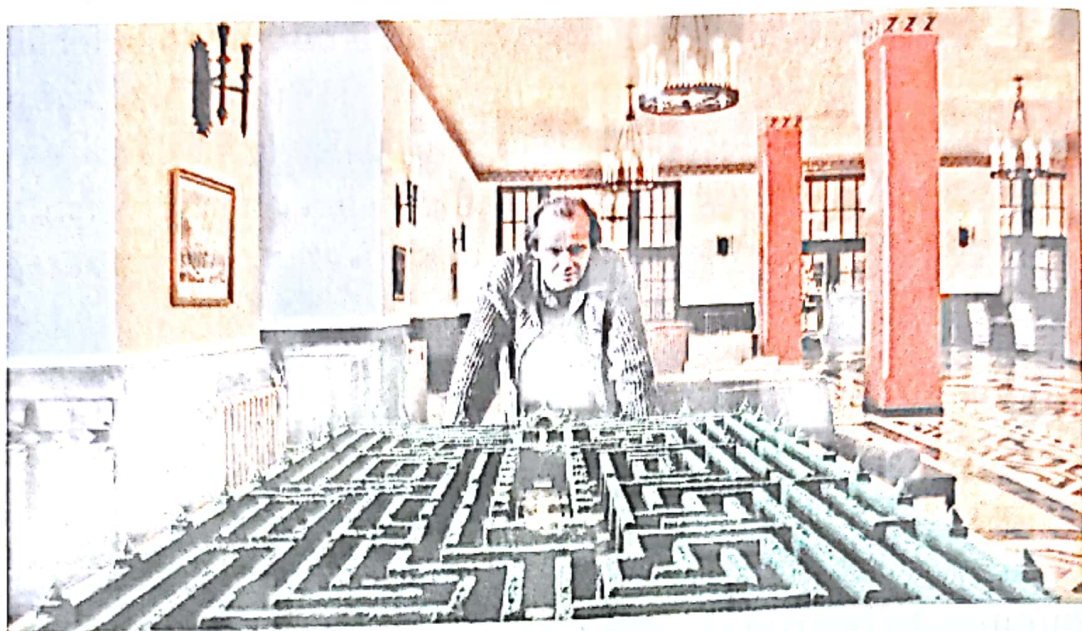
Unul dintre ingredientele filmului, perfect adaptat suspan-
sului și stilului horror, e folosirea unui labirint din gard viu în care protagonistul Jack Torrence, interpretat de Jack Nicholson, își urmărește copilul, Danny, ale cărui capacități telepatice, mai cu seamă visele „strălucitoare”, dau titlul romanului și al filmului. În labirintul acela, Jack moare de frig în zăpadă, incapabil să mai găsească drumul spre ieșire după ce s-a rătăcit pe urmele fiului.

Labirintul e o inovație a lui Kubrick, în locul lui King folo-
sise tufișuri vii, tunse în formă de animale. În afară de labirintul real, construit în platou pentru scenele respective și reconstruit în fața hotelului Stanley pentru turiști, în film mai apar încă două. Primul e pe o hartă atârnată de perete, chiar la intrare. Al doilea e un model în miniatură expus în holul hotelului.

Când Jack studiază modelul, are impresia că-și vede soția și fiul în interior. În timp ce se apleacă pentru a vedea mai bine, camera face zoom pe un model miniatural diferit, un al patrulea labirint, deci, în film. Acesta din urmă e complet simetric, și pe verticală, și pe orizontală, spre deosebire de labirintul desenat pe hartă și de modelul său miniatural din *lobby*.

Un labirint pune multe probleme de natură matematică, prima fiind evident aceea atacată și nerezolvată de Jack: cum să ieși din el. Și, mai general, cum să ajungi dintr-un punct în altul: de exemplu, de la intrare în centru. Evident, nu toate labirinturile au aceeași dificultate și nu toate metodele de rezolvare au aceeași eficacitate.

De exemplu, dacă pereții labirintului sunt toți conectați între ei, atunci se poate proceda literalmente *prin încercări*: se



Imagine din filmul *Shining*, de Kubrick

merge întotdeauna în aceeași direcție, fără să desprinzi vreo dată mâna (fie stânga, fie dreapta, dar să fie aceeași de la început) de perete. Motivul matematic pentru care metoda funcționează e că, datorită conexiunii, pereții formează o figură echivalentă din punct de vedere topologic cu un cerc care, în modul descris, va fi parcurs complet.

Din păcate, această metodă nu se aplica labirintului lui Kubrick, care avea mulți pereți deconectați de toți ceilalți: în acest caz, avansând prin încercări nu am face decât să ne învârtim în cerc în jurul lor. Dar când cineva are timp de pierdut și nu degeră de frig ca Jack, poate ieși din orice labirint prin așa-zisul *algoritm Las Vegas*: când ajunge la o bifurcație, alege la întâmplare direcția în care să meargă, de exemplu dând cu banul. Dacă acesta nu e calp, mai devreme sau mai târziu va găsi ieșirea, chiar dacă după foarte, foarte mult timp.

Există însă multe căi intermediare, adică între traseul determinist condus de mâna ținută pe pereții labirinturilor banale și drumul aleatoriu condus de banul aruncat în cazul labirinturilor arbitrare. Cazul tipic e al labirinturilor zise „perfecte”, care nu conțin *bucle* în care se poate merge în cerc: acestea sunt

echivalente cu *arborii* din teoria grafurilor, iar parcursurile posibile în ele sunt exact ramurile arborilor.

Dincolo de problema principală, găsirea unei căi de ieșire din labirint, apar multe altele, secundare: de exemplu, să determinăm cât e de dificil să găsim o soluție. Se intră astfel în teoria complexității: ne aflăm în fața unei tipice probleme *NP-complete*: știm să găsim un parcurs favorabil în timp exponențial în funcție de dimensiunea labirintului, dar nu cum să găsim unul în timp polinomial. Și cum un timp exponențial e mortal de lung, căutând ieșirea riscăm sfârșitul lui Jack Nicholson în labirintul lui Kubrick.

UN NOBEL DE OSCAR

Găurile negre ale lui Thorne

Filmul *Interstellar* (2014) al regizorului Christopher Nolan e unul dintre cele mai bune exemple de simbioză între cinematograf și știință. Iar cartea *Știința din filmul Interstellar* a laureatului Nobel pentru fizică Kip Thorne* e unul dintre cele mai bune exemple de popularizare a științei, reușind în dubla sarcină asumată de a ilustra știința cu imagini din film și de a explica filmul cu ideile științifice.

Interstellar e adaptarea făcută de Nolan scenariului original al lui Thorne, cu obișnuitele concesii făcute spectacolului cinematografic, dar cu o rară adeziune la verosimilul științific. În particular, nimic din ce arată filmul nu merge împotriva a ceea ce se știe despre găurile negre, lucruri demonstrate de Thorne ca fiind teoretic posibile, chiar dacă, în carte, el separă net ceea ce poate afirma cu siguranță de ceea ce se poate presupune în mod întemeiat și de ceea ce se poate doar conjectura.

* Humanitas, București, 2022 (n. tr.).



Gaura neagră din filmul *Interstellar*, de Nolan

În notele tehnice, Thorne se referă la unele noțiuni ale matematicii găurilor negre care apare ca fiind surprinzător de simplă, în ciuda faptului că derivă din teoria relativității generale publicate de Einstein în istoricul articol *Ecuația câmpului gravitațional* (25 noiembrie 1915). Ca urmare, cu puține luni înainte de a muri pe front, Karl Schwarzschild publica articolul *Asupra câmpului gravitațional al unei mase punctiforme conform teoriei lui Einstein* (13 iunie 1916), în care calcula raza orizontului evenimentelor unei găuri negre: e vorba de suprafața dincolo de care nimic din ce intră în gaura neagră nu mai poate ieși.

Pentru a găsi această rază, e suficient să observăm că relativitatea specială impune faptul că nimic nu se poate deplasa cu viteză mai mare decât a luminii, notată c , iar mecanica newtoniană calculează¹ că viteza de evadare a unui corp de masă M aflat la distanță r de gaura neagră e egală cu rădăcina pătrată a lui $2GM/r^2$. Astfel, Schwarzschild a observat că o masă M concentrată în interiorul razei $2GM/c^2$ devine o gaură neagră cu acea rază ca orizont al evenimentelor. Formula e valabilă pentru găurile negre statice, în schimb, pentru cele

1. Vezi secțiunea „Calculele Columbiei“.

care se rotesc, raza se poate micșora până la limita inferioară GM/c^2 , în funcție de viteza de rotație.

Efectul gravitației unei găuri negre de rază R asupra unui corp aflat la distanță r de ea este reglat de ecuațiile relativității generale. Cu toate acestea, Bohdan Paczyński și Paul Wiita au descoperit¹ că el se poate aproxima surprinzător de bine cu o mică variație a clasicei legi a inversului pătratului distanței: anume, în locul formulei GM/r^2 se pune $GM/(R-r)^2$. În particular, la distanțe mari, efectele găurilor negre nu se mai simt, iar gravitația einsteiniană coincide cu cea newtoniană.

În schimb, în apropierea orizontului evenimentelor, forța gravitațională tinde la infinit. În particular, la o distanță mai mică de trei raze R , orbitele circulare din jurul găurii negre încetează să mai fie stabile și obiectele tind să fie capturate. Totuși, traversarea orizontului nu ar fi percepută de cineva care ar intra în gaura neagră, chiar dacă imaginea obiectului care intră în gaura neagră ar dispărea pentru observatorii exteriori, la fel cum se întâmplă și cu orizontul terestru. Altfel spus, în timp ce singularitatea din centrul găurii negre e fizică și absolută, singularitatea orizontului evenimentelor e cartografică și perceptibilă numai de observatorii externi.

Formula cea mai surprinzătoare e însă cea găsită de John Wheeler, profesorul lui Thorne, în cartea sa² din 1998, și se referă la masa găurii negre care rezultă din ciocnirea și fuziunea a două găuri negre statice (care nu se rotesc). Procesul generează unde gravitaționale care azi pot fi detectate cu detectorul LIGO proiectat de Thorne, realizare care i-a adus Premiul Nobel pentru fizică în 2017. În generarea acestor unde se pierde energie, ceea ce face ca masa găurii negre rezultate să fie mai mică decât suma maselor celor două găuri negre care

1. „Thick accretion disks and supercritical luminosities“, *Astronomy & Astrophysics*, 88: 23–31.

2. John Archibald Wheeler, *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*. New York: W.W. Norton & Co., 1998.

se ciocnesc: valoarea precisă e rădăcina pătrată a sumei pătratelor celor două mase, cu o neașteptată aplicație a celei mai cunoscute teoreme a geometriei antice la teoria celor mai cunoscute obiecte ale cosmologiei moderne.

MĂRTURISESC CĂ NU ÎNȚELEG

Formula lui Andò

Unul dintre succesele de critică și de public din 2016 a fost *Le confessioni*, în care, încă o dată, Toni Servillo a fost protagonistul unui film al lui Roberto Andò, după dublul rol din *Viva la libertà*, cu trei ani în urmă. De data asta, însă, actorul din Caserta nu mai interpreta un om politic, ci un frate dominican care ajunge să ia parte la o reuniune a miniștrilor economiei din G8.

Motivul bizarei prezențe era faptul că acel conclav urma să discute adoptarea unui mecanism secret cu consecințe greu de estimat pentru popoarele țărilor respective. Ceea ce implica o problemă etică: drept consecință, directorul Fondului Monetar Internațional invită acest străin care, prin profesia lui, ar putea avea ceva de spus.



Fratele-matematician din filmul *Le confessioni*

Directorul are o discuție cu fratele dominican, apoi însă moare, iar filmul devine un thriller în care se caută fie asasinul, fie motivul eventualei sinucideri. La sfârșit aflăm că fratele, înainte de a se călugări, fusese matematician, fiind deci foarte bine plasat pentru a înțelege pericolul unei formule misterioase pe care directorul i-o arătase în cursul discuției purtate, și pe care el avea să le-o explice miniștrilor tulburați, reușind să-i convingă să nu adopte acel mecanism secret.

În ochii criticilor și ai publicului deopotrivă, formula trece, evident, în planul secund, în comparație cu problemele etice ridicate de măsurile economice ce urmau să fie luate de puterici lumii peste capetele noastre, dar un matematician pe care directorii FMI, miniștrii economiei și dominicanii îl lasă rece, tocmai în ea găsește motivul cel mai puternic de interes al filmului.

Întâi de toate, formula respectivă are două părți. Prima dintre ele este:

$$Z(t) = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} p_i(t) - q_i(t)}{\sum_{i=1}^{m-1} p_i(t)},$$

Cu Z cuprins între 0 și 1. A doua este:

$$G\ddot{X} = -\nabla U(x) - \gamma G\dot{X} + \sqrt{2\gamma p Q Z(t)}.$$

Impresia e aceeași despre care se povestește că ar fi avut-o Godfrey Harold Hardy atunci când a văzut pentru prima dată unele formule ale lui Ramanujan:¹ ici-colo, câte ceva pare straniu și nelalocul lui, dar ansamblul pare să aibă noimă.

O metodă pentru a-i da de cap este cea folosită la vremea lui de Hardy: îl rogi pe autor să te lumineze, ca să înțelegi ce se află în spatele formulei. Iar regizorul Andò a avut amabilitatea să ne explice cum a ajuns să aleagă acele formule, la sfatul lui Mauro Palma, expert în didactica matematică și colaborator al Ministerelor Educației Publice și Justiției. Iată ce spune regizorul:

1. Vezi secțiunea „La cinema“.

Prima formulă e esențialmente reprodusă fără nici o modificare: e vorba despre *indicele (ori raportul) de concentrare al lui Corrado Gini*¹, propus aici pentru că evocă repartizarea unei cantități totale între mai multe unități: de exemplu, venitul global al unei națiuni între componentele ei, ori bogăția totală între diferiții actori prezenți la summit.

A doua formulă e o manipulare foarte fantezistă care pleacă de la *formula lui Benjamin Olinde Rodriguez pentru polinoamele ortogonale*. Schimbarea puternică face de nerecunoscut nucleul inițial al formulei, aleasă în primul rând pentru figura lui Rodriguez, exponent al mișcării sansimoniste, chiar dacă a abandonat-o în 1832, când s-a lansat în afaceri și a devenit bancher: o figură complexă care, într-un anumit fel, face aluzie la obscuritatea perechii din film, reprezentate de directorul FMI și de călugărul ex-matematician.

Cât despre matematica în sine, Andò spune că întreține cu ea „un raport de pură ascultare”, la fel ca și cu muzica. Pentru el, matematica e „un peisaj care se cere contemplat, care te eliberează de cuvânt, te scutește de a vorbi și, ca toate peisajele, nu se epuizează în ceea ce se vede”. Interesul său pentru matematică, fie ca regizor, fie ca scenarist al filmului, derivă din faptul că „exact la granița dintre vizibil și invizibil, dintre spus și nespus, se află ceea ce merită să fie povestit”. Și, am putea adăuga noi, ca matematicieni și spectatori, și poveștile care merită ascultate.

RĂDĂCINILE FOTOGRAFIEI

Numerele diafragmei

Cu exact o mie de ani în urmă, arabul Alhazen a produs o monumentală *Optică* în șapte volume, în care, printre altele, făcea o paralelă între ochiul uman și aparatul de fotografiat

1. Vezi secțiunea „Matematica egalității”.

(chiar dacă el se referea la precursora din vremea lui, camera obscură): pleoapele corespund obturatorului, pupila e pe post de obiectiv, cristalinul ar fi lentila care focalizează, irisul corespunde diafragmei și retina peliculei.

În realitate, așa cum se întâmplă de regulă la lentile, cristalinul focalizează doar pe o mică parte a retinei, numită *fovea*: pentru focalizarea întregii imagini e nevoie de o serie continuă de oscilații rapide ale ochiului, numite *sacade*. Iar motivul pentru care nu amețim privind, așa cum se întâmplă când mișcăm repede capul cu ochii deschiși, e că în timpul fiecărei mișcări inconștiente a ochilor creierul inhibă percepția optică prin suprimare sacadică.

Vederea este deci analogul unui film constituit dintr-o succesiune de instantanee, fiecare dintre ele declanșat cu un anumit timp de expunere și cu o anumită deschidere a irisului, care la aparatele de fotografiat corespunde deschiderii diafragmei. Cantitatea de lumină care intră în obiectiv depinde de felul cum se combină aceste două elemente, dar nu în manieră univocă: într-adevăr, aceeași cantitate de lumină se poate obține prin combinații diferite care merg de la o diafragmă mai deschisă și un timp de expunere mic până la o diafragmă mai închisă și o expunere mai îndelungată.

Similar, în geometrie, aceeași ipotenuză a unui triunghi dreptunghic se poate obține prin diferite combinații de catete: mai precis, toate acelea care corespund vârfului triunghiului dreptunghic situat pe cercul care are ca diametru ipotenuza respectivă. Iar în relativitate, același interval spațio-temporal se poate obține prin diferite combinații de distanțe spațiale și durate temporale: mai precis, toate acelea care corespund unui vârf situat pe hiperbola cu distanța focală egală cu intervalul dat.

Analogia dintre exemplele citate provine din faptul că, în relativitate, spațiul e hiperbolic, nu euclidian, iar expresia care determină distanța e o diferență, nu o sumă, de pătrate. În schimb, analogia cu fotografia provine din aceea că deschiderea

diafragmei determină o suprafață spațială, iar expunerea determină o durată temporală.

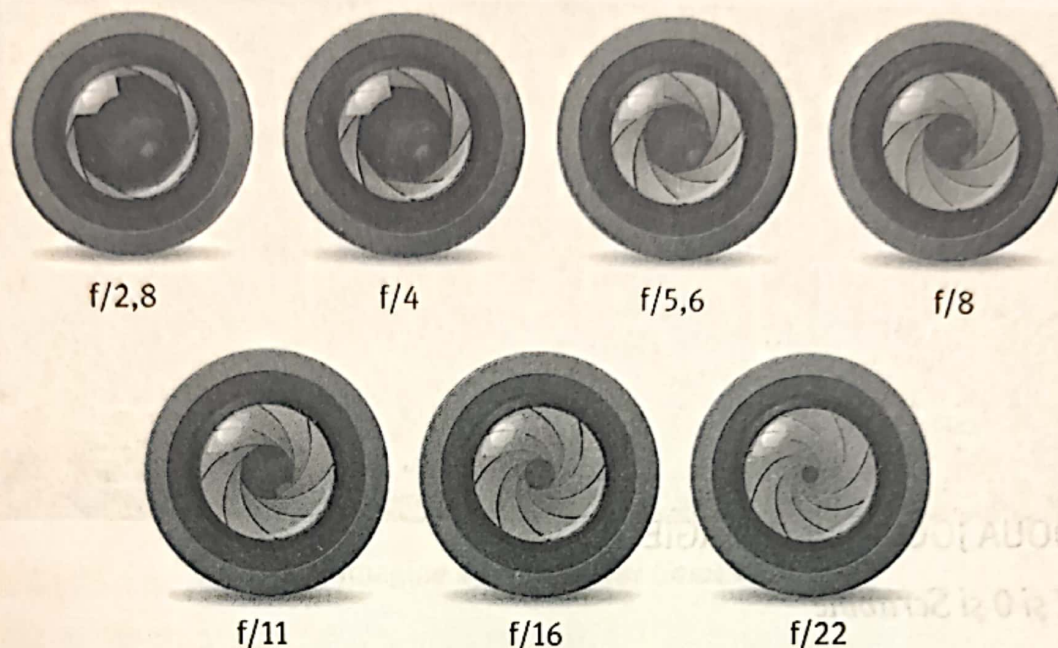
În 1954, firmele cele mai importante de material fotografic au adoptat definiția *valorii de expunere*, propusă de Friedrich Deckel, ca logaritm în baza 2 al raportului dintre suprafața deschiderii diafragmei și timpul de expunere: în formule, $VE = \log_2 A/T$. Valoarea de expunere 0 corespunde lui $A/T=1$, stabilită ca fiind cantitatea de lumină care intră în obiectivul complet deschis timp de o secundă.

Datorită folosirii logaritmului în baza 2, la fiecare creștere unitară a valorii de expunere se înjumătățește cantitatea de lumină: de exemplu, dacă deschiderea rămâne constantă, se înjumătățește timpul, iar dacă timpul rămâne constant, se înjumătățește deschiderea. Astfel, valoarea de expunere 1 corespunde unui obiectiv complet deschis o jumătate de secundă, sau unui obiectiv deschis pe jumătate timp de o secundă.

Cu un obiectiv complet deschis, șirul crescător de valori de expunere 1; 2; 3; 4; 5 ș.a.m.d. corespunde teoretic șirului descrescător de timpi de expunere $1/2$; $1/4$; $1/8$; $1/16$ ș.a.m.d. În practică însă, aceste valori se rotunjesc la $1/2$; $1/4$; $1/8$; $1/15$; $1/30$; $1/60$ ș.a.m.d.

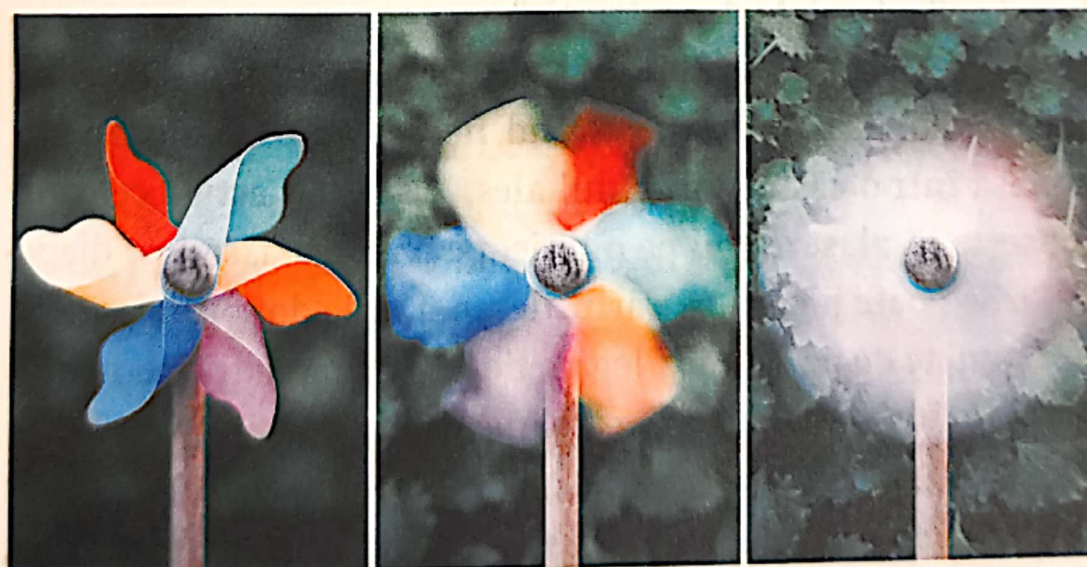
În mod similar, pentru un obiectiv deschis timp de o secundă, șirului crescător al valorilor de expunere îi corespunde un șir descrescător de suprafețe ale diafragmei. Fiind însă incomod să se lucreze direct cu suprafețele, se lucrează indirect cu pătratele diametrelor: pentru a înjumătăți suprafața, ar trebui împărțit diametrul la radical din 2, adică la aproximativ 1,4. Deschiderile descrescătoare ale diafragmei ar corespunde deci, teoretic, împărțirilor cu puterile rădăcinii pătrate a lui 2, adică cu 1,4; 2; 2,8; 4; 5,7; 8; 11,3; 16 ș.a.m.d., iar în practică, împărțirilor prin 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8 ș.a.m.d.

O diafragmă de 2,8 și un timp de $1/125$, de exemplu, sunt echivalente, ca valoare de expunere, unei diafragme de 4 și unui timp de $1/60$. Dar respectivele fotografii nu vor fi asemenea,



Închiderile succesive ale diafragmei și timpi diferiți

pentru că, măbind diafragma, crește profunzimea zonei focalizate, iar crescând timpul, crește efectul dat de mișcare: două aspecte independente care nu pot fi controlate simultan, datorită unui fel de „principiu de neterminare” fotografic.



Imagini ale aceleiași moriști în mișcare, cu aceeași valoare de expunere, dar cu diafragme și timpi diferiți

JOACĂ

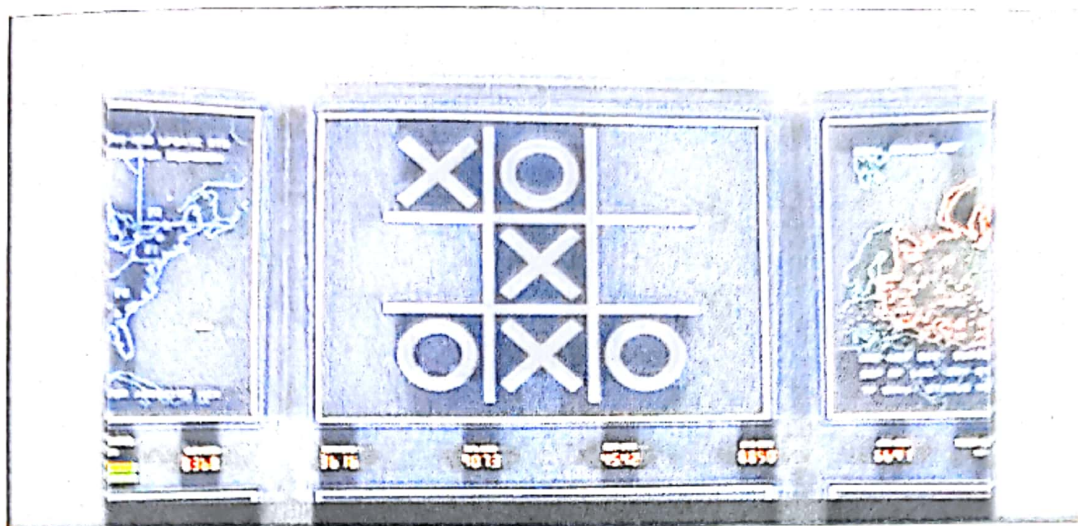
DOUĂ JOCURI ȘI-O MAGIE

X și O și Scrabble

În *Ars amatoria*, Ovidiu descrie câteva jocuri care pot servi drept preludii amoroase, despre unul dintre ele spunând: „Se pun în ordine niște pietricele pe o tăbliță, ca lunile în calendar, și câștigă cine pune trei la rând. E mare păcat dacă o doamnă nu știe să-l joace, pentru că adesea stimulează dragostea.” Jocul acesta, atestat și de multe mărturii arheologice, este numit *terni lapilli*, „triplele de pietricele”.

Era o variantă a lui *X și O* al nostru, jucat pe o grilă trei pe trei. Cei doi jucători mută pe rând, fiecare mutare constând în a plasa într-o căsuță simbolul ales, X sau O. Câștigă cel care reușește să plaseze trei pe o linie, pe o coloană, sau pe diagonală. Se poate juca și pe vârfurile unei grile doi pe doi, ori pe opt puncte de pe un cerc, legate fiecare prin raze de centru.

Numărul de moduri în care jucătorii pot umple cele nouă căsuțe este factorialul lui 9, adică $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 = 362.880$, dar dintre acestea numai 45.360 sunt cu adevărat diferite între ele, deoarece caroiajul are opt simetrii: patru rotații în jurul centrului și patru simetrii axiale (față de axe perpendiculare prin centru și față de diagonale). Cum un joc se termină când trei simboluri de același fel sunt aliniate, numerele scad la 255.168 și 31.896: calculul se face numărând câte jocuri se termină după



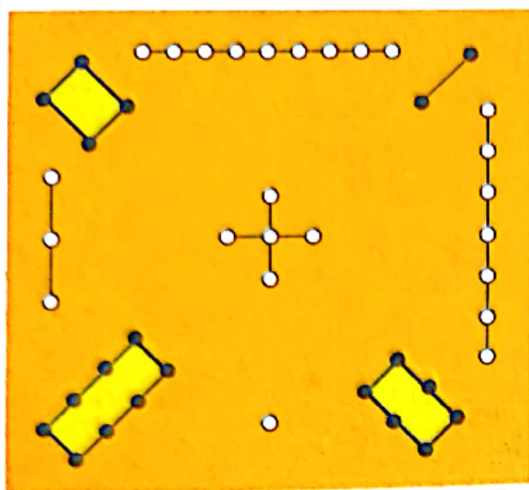
Imagine din filmul *War Games*

5, 6, 7, 8 sau 9 mutări cu victoria unuia din jucători, și câte se termină după 9 mutări cu remiză.

Evident, acestea sunt toate partidele posibile, inclusiv cele în care unul sau ambii jucători fac mutări stupide ori greșite. Jucând însă atent, fiecare jucător are posibilitatea să evite să piardă: dacă amândoi reușesc asta, jocul se termină întotdeauna la egalitate. Acesta e motivul pentru care, în scena finală a filmului *War Games* (1983), computerul e pus să joace X și O contra lui însuși, e forțat să ajungă la remiză și să exclame: „Ce straniu joc, singura mutare câștigătoare e să nu joci!”.

Dacă X și O e un joc geometric, *Scrabble numeric* e un joc aritmetic, jucat cu numerele de la 1 la 9. Și aici cei doi jucători alternează mutările, care constau în alegerea câte unui număr dintre cele rămase la dispoziție. Câștigă cel care a ales trei a căror sumă face 15. Dacă nici unul nu reușește, se consideră remiză.

Și aici strategia cea mai naturală e să eviți ca adversarul să câștige, lucru posibil, iarăși, pentru ambii jucători: altfel spus, întotdeauna se poate forța remiza. Pe de altă parte, intuiția folosită în *Scrabble numeric* e de cu totul altă natură decât cea de la X și O, și se bazează pe cele opt descompuneri ale lui 15 în trei numere diferite între 1 și 9, acestea fiind: $9 + 5 + 1$, $9 + 4 + 2$, $8 + 6 + 1$, $8 + 5 + 2$, $8 + 4 + 3$, $7 + 6 + 2$, $7 + 5 + 3$ și $6 + 5 + 4$.



4	9	2
3	5	3
8	1	6

Dacă, în schimb, preferăm să gândim geometric, atunci numerele de la 1 la 9 pot fi imaginate ca puncte, iar descompunerile lui 15 în sume de câte trei numere, ca drepte care trec prin acele puncte. Putem dispune cele 9 puncte în căsuțele unui caroi 3 pe 3; observăm apoi că 1, 3, 7 și 9 apar în numai două descompuneri, așa că trebuie plasate în căsuțele din centrul fiecărei laturi, acolo unde se întâlnesc numai două drepte. În schimb, deoarece 2, 4, 6 și 8 apar în câte trei descompuneri, ele trebuie plasate în colțurile pătratului, acolo unde se întâlnesc câte trei drepte. În sfârșit, 5 apare în patru descompuneri, deci va fi pus în căsuța centrală, unde se întâlnesc patru drepte.

Se obține astfel pătratul magic pe care chinezii de acum două mii de ani îl numeau *Lo Shu*, cu, de exemplu, numerele 4, 9, 2 pe prima linie, 3, 5 și 7 pe a doua și 8, 1, 6 pe a treia. Cele trei linii, trei coloane și două diagonale ale sale constituie cele opt drepte corespunzătoare celor opt descompuneri ale lui 15 în trei numere distincte între 1 și 9, iar Scrabble numeric e echivalent cu X și 0 jucat pe pătratul magic: unei descompuneri a lui 15 în trei numere ca mai sus, din primul joc, îi corespunde o serie de trei simboluri de același fel aliniate, în al doilea joc, și viceversa.

Cele două jocuri sunt deci definite în mod dual, în sensul că în X și 0 se pleacă de la puncte (căsuțe) prin care trec drepte, în timp ce în Scrabble numeric se pleacă de la drepte pe care

stau punctele. Iar legătura dintre ele se află în natura dublă a pătratului magic, în care numerele constituie căsuțele din X și 0, iar dreptele descompunerile din Scrabble numeric.

NU ÎNCAPE NICI O ÎNDOIALĂ

Origami

Într-un interviu acordat în 2018, imediat după câștigarea Medaliei Fields, Alessio Figalli a declarat că învățământul matematic ar trebui făcut mai amuzant, introducând în școală jocuri de tot felul. Și ce e mai firesc decât să propui *origami*?

Pare doar o glumă, dar adevărul e că există o întreagă tradiție în legătură cu asta. Găsim, de exemplu, o mărturie încă din 1492, într-o ediție tipărită a *Tratatului despre sferă*:¹ în speță, e vorba despre faimoasa bărcuță din hârtie pe care cu toții am construit-o în copilărie.

Legătura dintre *origami* și geometrie provine din faptul că, atunci când îndoim hârtia, obținem automat îndoituri rectilinii, deci construcțiile prin îndoire reprezintă un analog al construcțiilor cu rigla. În realitate, ne dăm seama repede că, prin îndoituri ale hârtiei, se pot obține toate construcțiile de puncte și linii care, în geometria euclidiană, se obțin cu rigla și compasul.

Într-adevăr, a uni două puncte printr-o linie corespunde unei îndoituri care trece prin cele două puncte. Și chiar dacă nu se poate construi direct un cerc care să aibă un anumit segment drept rază și una dintre extremitățile lui drept centru, indirect se poate obține orice punct al cercului, în orice direcție pornind din centru, mutând cealaltă extremitate a segmentului în acea direcție.

A duce bisectoarea unui unghi și a găsi mijlocul unui segment e banal: e suficient să îndoim o extremitate a segmentului peste cealaltă, sau o latură a unghiului peste cealaltă. Nici

1. Johannes de Sacrobosco, *Tractatus de sphaera*, 1230.

trasarea perpendicularei printr-un punct la o dreaptă nu e mult mai dificilă: e suficient să îndoi dreapta peste ea însăși, așa încât îndoitura să treacă prin punctul dat. Repetând construcția, se obține perpendiculara pe perpendiculara care trece printr-un punct dat, deci o paralelă la prima.

La fel de banală e demonstrația faptului că suma unghiurilor unui triunghi e egală cu un unghi plat (adică două unghiuri drepte). De data asta e suficient să construim înălțimea unei laturi, construind perpendiculara pe ea prin vârful opus, apoi să facem trei îndoituri succesive, astfel ca toate trei vârfurile să se regăsească în piciorul înălțimii: se observă că, în felul acesta, cele trei unghiuri ale triunghiului se așază compunând un unghi plat.

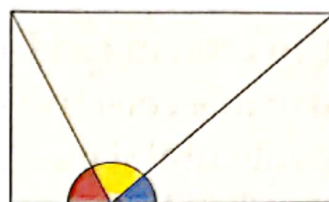
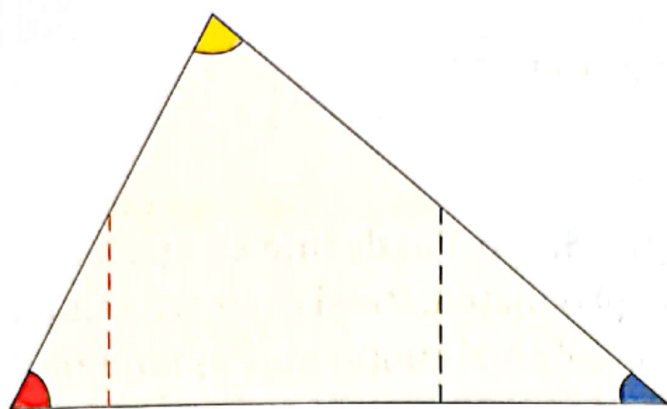
Origami este deci o abordare complementară a geometriei euclidiene și a fost introdus ca instrument didactic de indianul Sundara Row¹ în 1893. În mod surprinzător însă, forța îndoiturilor de hârtie depășește cu mult puterea riglei și a compasului! Prima care a observat acest lucru a fost Margherita Beloch Piazzolla, în două articole de pionierat.²

De exemplu, folosind *origami*, se pot trisecționa unghiuri și se pot tripla laturile poligoanelor: în particular, se poate construi un eneagon regulat. Altfel spus, se rezolvă ușor două probleme celebre pe care grecii nu reușiseră să le rezolve, pentru că nu pot fi rezolvate folosind numai rigla și compasul.

Evident, construcțiile cu *origami* nu se limitează la figuri plane. Dimpotrivă, încă de la început au fost folosite mai ales pentru construcții tridimensionale, inclusiv pentru poliedre, regulate sau nu. La fel ca în geometria plană, și în geometria

1. Sundara Rao T., *Geometric exercises in paper folding*, Addison & co., Madras, 1893.

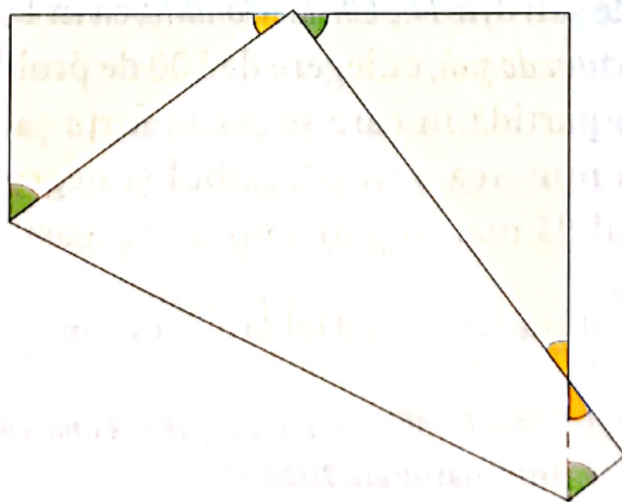
2. „Sul metodo del ripiegamenio della carta per la risoluzione dei problemi geometrici“, *Periodico di Matematiche*, Serie VI, vol. XVII, 1936, pag. 104; „Sulla risoluzione dei problemi di 3° e 4° grado col metodo del ripiegamento della carta“, *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, Istituto di matematica della Università, 1936, p. 93.



în spațiu se poate obține cu ele mai mult decât prin construcțiile euclidiene cu rigla și compasul: în particular, cu *origami* se poate duplica cubul, rezolvând astfel încă una dintre problemele pe care grecii n-au putut să le rezolve cu metodele lor.

În afară de extinderea geometriei euclidiene, mergând până la rezolvarea unor probleme nerezolvate deocamdată sau nerezolvabile, *origami* deschide și noi orizonturi. Exemplul cel mai original pare să fie *teorema lui Haga*, demonstrată de Kazuo Haga în 1979, dar anticipată deja cu cel puțin un veac înainte, într-un *sangaku*: e vorba despre faptul că, îndoind un pătrat astfel încât un vârf să ajungă pe una dintre laturi, se obțin întotdeauna trei triunghiuri dreptunghice asemenea. Demonstrația e banală, e suficient să ne uităm la unghiuri.

Una peste alta, nu e nevoie să căutăm prea departe pentru a întineri și înnoi învățământul matematic: e de-ajuns să avem câteva foi de hârtie și chef de joacă. Altfel spus, cu un pic de bunăvoință, lucrurile pot lua și în școală o altă întorsătură.



SEMNUL CELOR CINCISPREZECE*

Un puzzle al lui Loyd

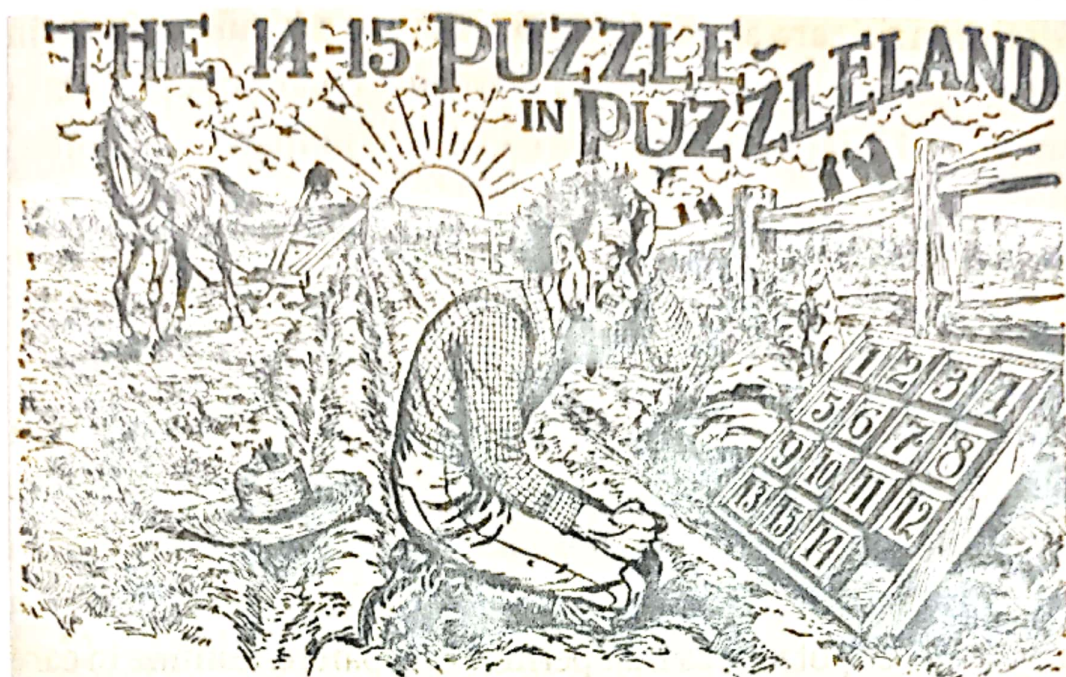
Din când în când, din motive imposibil de înțeles, apare câte o manie colectivă de tip logico-matematic și captează atenția publicului și mediei. Printre cele mai cunoscute e așa-numitul *Puzzle al lui 15*, inventat în 1878 de Samuel Loyd, care constă într-un caroiaj patru pe patru în care primele cincisprezece căsuțe (în ordinea obișnuită: de la stânga la dreapta pe linii, de sus în jos pe coloane) sunt umplute cu numerele de la 1 la 15 în ordine, cu excepția lui 14 și 15 care sunt inversate, iar ultima căsuță e goală.

Jocul constă în a luneca una câte una căsuțele în interiorul caroiajului, cu mișcări orizontale și verticale, astfel ca la sfârșit să obții *toate* numerele (inclusiv 14 și 15) în ordinea naturală. Loyd a oferit un premiu de o mie de dolari (cam o sută de mii în banii de azi) pentru prima soluție corectă, apoi, în *Enciclopedia celor 5000 de puzzle-uri, trucuri și ghicitori*¹, publicată postum, în 1914, iar azi ușor de găsit pe net, a povestit o serie de anecdote amuzante despre obsesia generată de acest puzzle în SUA și în Europa atunci când a fost publicat prima oară, în 1880, și despre soluțiile fanteziste pe care mii de persoane declarau că le găsiseră din întâmplare și, ghinion!, le uitaseră.

E clar că Loyd, care era un profesionist, știa ce riscă. Într-adevăr, își începuse cariera în 1857 ca responsabil al rubricii de probleme de șah din *The Chess Monthly*, ca în 1878 să publice o *Strategie a jocului de șah*, culegere de 500 de probleme, printre care: „găsiți o partidă în care se poate forța șahul perpetuu pornind de la mutarea a treia“, „albul și negrul fac aceleași mutări și albul dă mat în patru mutări“, „găsiți o partidă în

* Titlul face aluzie la romanul lui Arthur Conan Doyle, *Semnul celor patru* (n. tr.).

1. Sam Loyd, *Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks and Vonundrums (with Answers)*, Ishi Press International, 2007.



Ilustrație din *Enciclopedia* lui Loyd

care se ajunge la pat în zece mutări“, „regina trece prin toate căsuțele tablei de șah și revine la punctul de plecare în paisprezece mutări“.

Începând din 1870, interesul lui Loyd se mută treptat din spre șah spre matematică și logică, astfel că știa foarte bine că *Puzzle-ul lui 15* n-avea soluție. Modul cel mai simplu prin care ne putem convinge e examinarea permutărilor de numere din diferitele căsuțe, observând că, pe de o parte, toate se pot obține ca șiruri de transpoziții (care schimbă între ele doar câte două numere), și, pe de altă parte, că nici o permutare nu se poate obține și printr-un număr par de transpoziții, și printr-unul impar.

Acum, schimbarea lui 14 cu 15 e o permutare care corespunde unei singure transpoziții, deci unui număr impar. Dar orice permutare care lasă goală ultima căsuță trebuie să fie pară: e suficient să ne imaginăm căsuțele colorate alternativ, în negru și alb, de exemplu, ca pe tablele de șah, și să observăm că, din moment ce orice mutare schimbă culoarea căsuței libere, ca s-o aducem la poziția (și deci la culoarea) inițială e nevoie de un număr par de mutări.

Confuzia care a adus atâta popularitate jocului consta în faptul că lumea nu-și imaginea că trucul e chiar imposibilitatea soluției, ci e dat de dificultatea de-a o găsi în marea de mutări posibile: numărul permutărilor de șaisprezece obiecte e egal cu factorialul lui 16, adică este egal cu 20.922.789.888.000, dintre care jumătate sunt pare.

Și totuși problema fusese complet rezolvată încă din 1879 de către doi cercetători, în două „Note asupra Puzzle-ului lui 15” publicate în *American Journal of Mathematics*. Prima, de William Johnson, demonstra că nu e posibilă *nici o* permutare impară, așa cum tocmai am văzut. A doua, a lui William Story, arăta, în schimb, că se pot realiza *toate* permutările pare: chestiune în care excela fostul campion mondial de șah Bobby Fischer, care reușea întotdeauna să găsească o soluție în circa treizeci de secunde.

Mai aproape de noi, într-un număr din 1999 al *American Mathematical Monthly*, Aaron Archer a publicat „O tratare modernă a Puzzle-ului lui 15”, iar Jerry Slocum și Dick Sonneveld i-au dedicat o carte întreagă, *Puzzle-ul lui 15* (2006), arătând, printre altele, că o versiune a lui fusese deja inventată în 1874 de un poștaș pe nume Noyes Chapman, și brevetată de Ernest Kinsey în 1878. Ceea ce adaugă vechiului puzzle privind soluția, unul în plus privind atribuirea jocului.

SUSHI PENTRU CREIER

Sudoku

Vara lui 2006 a fost martora exploziei în Europa a chinuitorului Sudoku, care în japoneză înseamnă aproximativ „grilă numerică”. Pentru cine a uitat, se joacă pe o grilă 9 pe 9 subîmpărțită în 9 pătrate 3 pe 3. Grila vine cu câteva numere înscrise în unele căsuțe, iar jocul constă în completarea grilei inserând pe fiecare linie și coloană toate numerele de la 1 la 9.

E un joc de inspirație occidentală și deopotrivă orientală. Condițiile impuse liniilor și coloanelor corespund pătratelor latine introduse în secolul XVIII de marele matematician Euler¹, care însă folosea litere latine în loc de numere. În schimb, condiția asupra subpătratelor corespunde restricției impuse regelui și reginei din șahul chinezesc: într-adevăr, aceștia nu pot ieși din „palatul lor” de 3 pe 3 căsuțe.

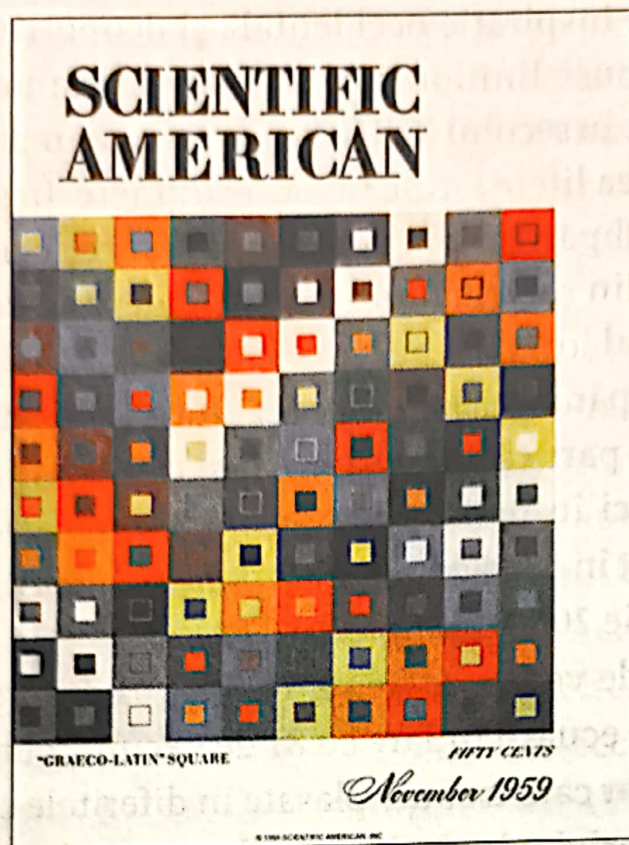
Chiar și răspândirea jocului e rezultatul acțiunilor din mai multe zone. Se pare că Sudoku ar fi fost inventat spre sfârșitul anilor șaptezeci în revista americană *Math Puzzles and Logic Problems*, copiat în 1984 de revista japoneză *Nikolist*, și repropus în 12 noiembrie 2004 de englezul *Times*.

Din punct de vedere matematic, e vorba despre rezolvarea unui sistem de ecuații liniare cu 81 de necunoscute, corespunzând numerelor care trebuie plasate în diferitele căsuțe. Regulele jocului cu privire la rânduri și coloane produc 27 de ecuații care impun sumelor variabilelor respective să fie egale cu 45. Condițiile inițiale, adică numerele care se află deja pe grilă, furnizează tot atâtea ecuații, fixând valoarea unora dintre variabile. Cele independente față de precedentele 27 pot fi cel mult 54: cu cât sunt mai puține, cu atât mai ușor e jocul, pentru că sistemul e subdeterminat, deci există mai multe soluții.

Există circa 5×10^{27} pătrate latine 9 pe 9 și circa 5×10^{21} grile de Sudoku, mai precis 6.670.903.752.021.072.936.960, după cum au calculat cu computerul Bertram Felgenhauer și Frazer Jarvis în 2005. Iar Takayuki Yato și Takahiro Seta au demonstrat în 2003 că rezolvarea unui Sudoku de dimensiune arbitrară e o problemă NP-completă: adică, deocamdată se poate rezolva în manieră exponențială în raport cu dimensiunea grilei, dar nu și în manieră polinomială.

Euler însuși a propus în 1782 un mod diferit de a restrânge pătratele latine – diferit și de actualul Sudoku – sub forma

1. Vezi secțiunea „Un orb vizionar”.



problemei ofițerilor și regimentelor: cum să plasezi 36 de ofițeri, reprezentând toate combinațiile posibile de 6 grade și 6 regiamente, într-o grilă 6 pe 6, așa încât pe fiecare linie și pe fiecare coloană să apară unul și numai un singur ofițer de un anumit grad și din fiecare regiment.

O asemenea aranjare se numește *pătrat alfanumeric* 6 pe 6, pentru că se poate reprezenta prin perechi de litere și numere asemănător celor folosite în bătaia navală, dispuse însă în așa fel încât, pe fiecare linie și pe fiecare coloană a unei grile 6 pe 6, și literele de la A la F, și numerele de la 1 la 6 să apară câte o dată și numai o singură dată. Evident, pătrate analoage 2 pe 2 nu există, iar Euler a conjecturat că nu există nici acelea 6 pe 6. Și, din bune motive, nici 10 pe 10, 14 pe 14 etc.

Conjectura lui Euler a rămas deschisă timp de 177 de ani. În 1959, Rajchandra Bose, Ernest Parker și Sharadchandra Shrikhande au demonstrat că e adevărată numai pentru pătratele 6 pe 6, și falsă în toate celelalte cazuri: în particular, există pătrate latine 10 pe 10. Descoperirea lor a fost anunțată

de Martin Gardner¹ în numărul din noiembrie 1959 al *Scientific American* și ilustrată cu 10 culori pe copertă.

Scriitorul francez Georges Perec a folosit apoi 21 dintre aceste pătrate alfanumerice 10 pe 10 pentru capodopera sa *Viața, instrucțiuni de folosire* (1978), ca să combine între ele obiecte, personaje și acțiuni care trebuiau inserate în cele 100 de camere ale unui bloc de 10 etaje, cu câte 10 camere pe etaj.²

DOAMNA E CUCERITĂ

Dame

O observație banală: în jocuri precum șahul sau damele există numai trei posibilități: ori câștigă albul, ori câștigă negrul, ori fac remiză. Dar în 1912, la Congresul Internațional al Matematicienilor, Ernst Zermelo a prezentat *O aplicație a teoriei mulțimilor la jocul de șah*, demonstrând o teoremă mult mai surprinzătoare: fie există o strategie care-i permite albului să câștige întotdeauna, fie există o strategie care-i permite negrului să câștige întotdeauna, fie există o strategie care le permite ambilor jucători să remizeze întotdeauna.

Cuvântul-cheie din enunțul lui Zermelo e, firește, acel triplu „întotdeauna”. Iar demonstrația e subtilă, dar nu dificilă: presupunem că nici unul din primele două cazuri nu e adevărat (adică nu există strategie câștigătoare pentru nici unul din jucători) și demonstrăm că e adevărat al treilea (deci că există strategie prin care se ajunge automat la remiză).

Cum albul nu are o strategie de victorie, nici o deschidere a sa nu poate fi victorioasă de la început: deci negrul poate răspunde întotdeauna cu o mutare care să ducă la victoria lui sau la remiză. Dar cum nici negrul nu are o strategie de victorie,

1. Vezi secțiunea „Jocuri”.

2. Vezi și secțiunea „Șah la matematică”.

albul poate alege întotdeauna o deschidere care nu e perdantă: există deci o mutare inițială a albului care, indiferent de răspunsul negrului, îi permite albului să răspundă cu o mutare care-l conduce la victorie sau la remiză.

La fel și pentru negru, deci ambii jucători au posibilitatea să mute în așa fel încât, după deschiderile fiecăruia, nici unul din ei să nu se afle într-o situație care ar duce inevitabil la victoria celuilalt. Însă asta înseamnă că ne-am întors la situația inițială și raționamentul se poate repeta indefinit: există deci o strategie pentru ambii jucători care împiedică adversarul să câștige, și deci le permite amândurora să remizeze.

Demonstrația asta are totuși două defecte. În primul rând, nu spune care e strategia pe care trebuie s-o urmeze cei doi jucători ca să remizeze, în cazul în care nici unul din ei nu are strategia câștigătoare. Și, mai ales, nu decide care dintre cele trei cazuri posibile are efectiv loc: dacă are albul strategia câștigătoare, sau dacă o are negrul, sau dacă ambii au strategie de remiză.

Teorema lui Zermelo este deci un tipic rezultat existențial: demonstrează indirect existența a ceva, fără să identifice direct acel ceva. După cum observa marele matematician David Hilbert¹, e la fel ca atunci când spunem că, dintre persoanele aflate într-o încăpere, una are cele mai multe fire de păr (pentru că e un număr finit de persoane și fiecare are un număr finit de fire de păr), dar, în general, nu putem spune care anume e acea persoană.

Chiar și așa, cu limitările ei, teorema lui Zermelo a fost primul rezultat important al *teoriei jocurilor*, care studiază situațiile de conflict dintre doi sau mai mulți combatanți, și care a dus deja la o duzină de Premii Nobel pentru economie: primul dintre toate, al celebrului John Nash², protagonistul filmului

1. Vezi secțiunile „Sfaturi pentru frizeri” și „Îndoieli și certitudini”.

2. Vezi secțiunile „Un joc de autor” și „Rămas-bun unei minți strălucite”.

A Beautiful Mind. În șah însă, teoria jocurilor nu a lămurit încă situația: se poate doar presupune că strategia a cărei existență o demonstrează teorema trebuie să ducă la victoria albului, dat fiind avantajul de netăgăduit pe care albul îl are în fața negrului, sau, cel mult, la remiză pentru ambii.

Că lucrurile chiar stau așa în jocul, mai simplu, de dame, a anunțat matematicianul Jonathan Shaeffer în numărul din 14 septembrie 2007 din *Science*. Acesta era deja celebru grație programului Chinook, care câștigase în 1994 campionatul mondial de dame învingând un alt matematician, Marion Tinsley, care dominase arena timp de patruzeci de ani, câștigând titlul mondial de nu mai puțin de opt ori și pierzând de doar șapte ori în toată cariera sa (dintre care două împotriva computerului).

În două reprize, întâi în 1989–1997, apoi în 2001–2007, echipa lui Shaeffer a pus la lucru fără încetare sute de calculatoare pentru a examina toate finalurile posibile de joc cu cel mult zece piese. O sută de mii de miliarde de calcule (10^{14}) au demonstrat până la urmă existența unei strategii care permite fiecărui jucător să remizeze întotdeauna. Așadar, la dame, partida perfectă se termină mereu democratic, la egalitate.

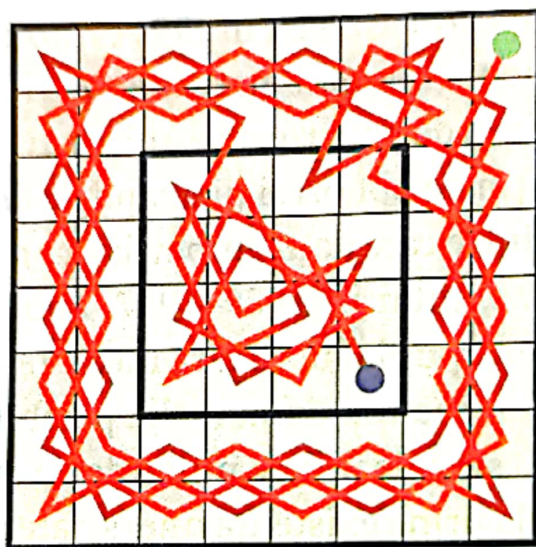
ȘAH LA MATEMATICĂ

Șah

Abraham De Moivre a fost un matematician francez care și-a calculat corect data morții, survenită în 27 noiembrie 1754. Într-adevăr, el observase că doarme în fiecare zi cu un sfert de oră mai mult decât în ziua precedentă, de unde a dedus că moartea îl va ajunge atunci când va începe să doarmă un somn neîntrerupt, de douăzeci și patru de ore pe zi.

În 1722, De Moivre, care-și mai rotunjea veniturile subțiri jucând șah, a găsit o secvență de mutări prin care calul putea să treacă prin fiecare căsuță a tablei de șah o dată și numai o

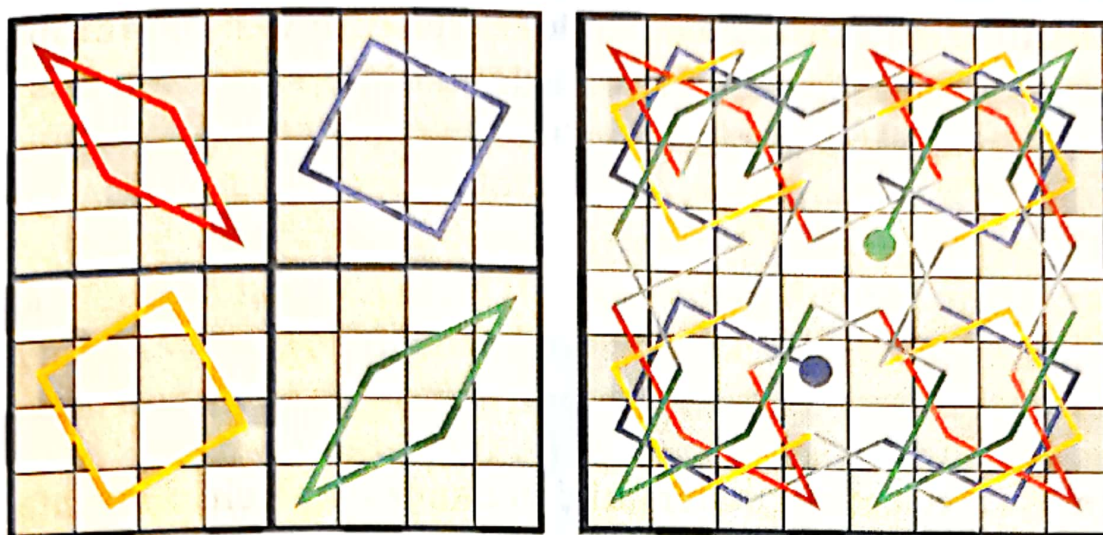
dată. Și-a publicat soluția în 1725, în revista *Recreații matematice și fizice* a lui Jacques Ozanam, care-i fusese tutor, dezvăluind și care fusese ideea de rezolvare a problemei. Anume, reducerea ei la două probleme mai simple: găsirea, respectiv, a traseelor prin care calul acoperă o dată și numai o dată toate căsuțele din subpătratul central 4 pe 4 al tablei, și pe cele din coroana exterioară rămasă, apoi legarea lor.



În 1759, Euler a propus o *Soluție a unei probleme curioase care nu pare să fi fost supusă nici unei analize*: găsirea unei secvențe închise de mutări ale calului din al cărei punct terminal calul să se poată întoarce printr-o singură mutare în punctul inițial. Un asemenea traseu, pe o tablă 10 pe 10, și-a găsit o neașteptată aplicație în 1978, când Georges Perec l-a folosit ca structură a narațiunii din romanul său *Viața, instrucțiuni de folosire*.¹

O modalitate convenabilă pentru a obține un asemenea circuit a propus Teodoro Ciccolini, în 1836, în cartea *Despre calul din jocul de șah*. Metoda lui constă în împărțirea tablei în patru subpătrate 4 pe 4 și fiecare subpătrat în 4 trasee, două romboideale și două în formă de pătrat (vezi figura din stânga, în care însă în fiecare subpătrat e desenat numai unul dintre cele 4 trasee). Observația fundamentală e că traseele corespunzătoare

1. Vezi secțiunea „Sushi pentru creier“.



celor patru subpătrate se pot combina într-un traseu de 16 căsuțe ale tablei, iar aceste patru trasee se pot apoi uni într-un traseu complet (figura din dreapta).

La fel de interesante sunt traseele turei. În acest caz, problema are o soluție simplă și elegantă: o tură poate pleca dintr-o căsuță, apoi trece prin toate căsuțele tablei câte o singură dată, terminând într-o altă căsuță, dacă și numai dacă cele două căsuțe au culori diferite. Soluția e legată de o teoremă demonstrată în 1973 de Ralph Gomory: o tablă de șah din care se elimină două căsuțe se poate acoperi cu piese de lungime 2 pe 1 (ca acelea de domino) dacă și numai dacă cele două căsuțe au culori diferite. Legătura dintre problemă și teoremă e aceea că traseele corespund șirurilor de piese de domino și viceversa, pentru că tura se mișcă numai orizontal și vertical.

Pentru a demonstra una dintre implicațiile teoremei lui Gomory e suficient să observăm că pentru a acoperi 62 de căsuțe de pe tabla de șah avem nevoie de 31 de piese de domino, iar acestea acoperă 31 de căsuțe negre și 31 albe, deci cele două căsuțe rămase trebuie să aibă culori diferite.

Pentru implicația inversă, e suficient să considerăm un traseu al turei care acoperă întreaga tablă trecând o singură dată prin fiecare căsuță. Eliminând arbitrar două căsuțe de culori diferite, spargem acest traseu în două trasee separate,

fiecare cu câte un număr par de căsuțe. Acum e ușor să acoperim traseele respective cu piese de domino.

Așadar, șah la tură! Și la cal!

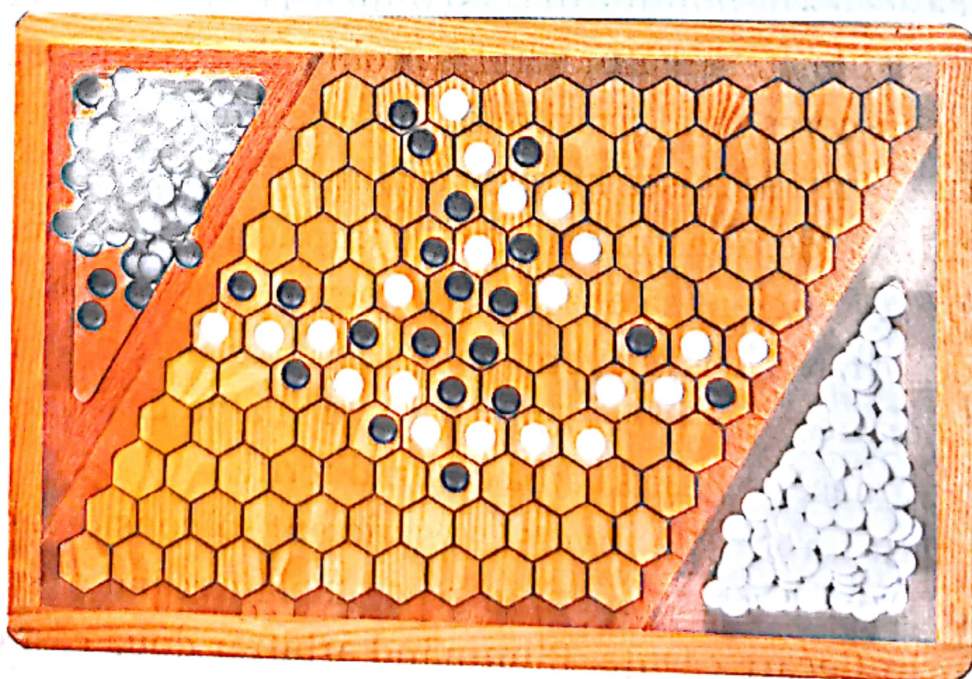
UN JOC DE AUTOR

Hex

În 1942, eclecticul matematician danez Piet Hein a inventat un joc inspirat din celebra *problemă a celor patru culori*, care întreabă dacă se poate colora o hartă cu numai patru culori, în așa fel încât orice două regiuni adiacente să fie colorate diferit.

La jocul lui Piet Hein participă doi jucători, pe o tablă romboi-dală, cu 11 pe 11 căsuțe hexagonale. Fiecare jucător primește două laturi opuse ale tablei și mai multe jetoane de o anumită culoare, albă sau neagră. Mutând alternativ, fiecare jucător își plasează jetoanele în căsuțe și câștigă acela care reușește să creeze un parcurs neîntrerupt între cele două laturi ale sale.

Legătura cu problema celor patru culori constă în faptul că, dacă ambii jucători ar putea câștiga, stabilind două trasee între



O partidă de Hex în care albul câștigă

laturile opuse, atunci ar exista o hartă cu cinci regiuni (cele patru determinate pe tablă de intersecția celor două trasee, plus exteriorul tablei), fiecare atingându-le pe celelalte patru: ar fi deci necesare cinci culori ca s-o colorezi conform cerințelor, n-ar ajunge patru. Se demonstrase însă încă din secolul XIX că nu există hărți de acest tip: ceea ce nu demonstrează teorema celor patru culori, dar demonstrează că, la jocul lui Hein, *numai unul din cei doi jucători poate câștiga*.

De ce se joacă pe o tablă cu căsuțe hexagonale? Pentru ca *cel puțin unul din jucători să poată câștiga*. Într-adevăr, pe o tablă cu căsuțe pătrate, într-un vârf se intersectează patru căsuțe și se poate demonstra ușor că jucătorii se pot bloca pe rând, ocupând la întâmplare câte două căsuțe pe diagonală în jurul unui vârf, și terminând remiză. În schimb, căsuțele hexagonale se întâlnesc doar trei în fiecare vârf, număr impar, deci jucătorii nu se pot bloca unul pe celălalt într-un vârf.

Hein le-a arătat jocul câtorva prieteni și studenți, în particular lui Aage Bohr, cunoscut pe-atunci ca fiu al lui Niels Bohr, Premiul Nobel pentru fizică în 1921, dar care a călcat apoi pe urmele tatălui, primind și el Premiul Nobel pentru fizică, în 1975. Cum jocul a atras atenția primilor jucători, Hein s-a hotărât să-l comercializeze. Versiunea comercială s-a numit Polygon și a avut o oarecare notorietate în Danemarca anului 1943.

În 1948, viitorul laureat Nobel pentru economie John Nash¹, pe-atunci doctorand la Princeton, i-a arătat lui David Gale un joc care se juca pe căsuțe pătrate și în care se putea muta nu doar vertical și orizontal, ci și pe diagonală. Gale și-a dat seama că jocul lui Nash se poate juca mai comod pe o tablă cu căsuțe hexagonale, a construit una 14 pe 14 și a pus-o la dispoziția matematicienilor, în sala comună. Jocul a avut un succes instantaneu și a devenit cunoscut ca „Nash“, după numele de familie al inventatorului, dar când a fost comercializat, în 1952, a devenit *Hex*.

1. Vezi secțiunea „Rămas-bun unei minți strălucite“.

Pe Nash, jocul îl interesa datorită proprietăților lui teoretice. În primul rând, a folosit *teorema de punct fix a lui Brouwer*¹ pentru a demonstra că jocul nu se poate termina remiză, iar în 1979 Gale a observat că e adevărată și reciproca: se poate folosi afirmația că Hex nu poate sfârși remiză pentru a demonstra teorema lui Brouwer. Altfel spus, cele două afirmații sunt echivalente.

În plus, Hex fiind un joc finit, teorema lui Zermelo ne asigură că unul din jucători are o strategie câștigătoare.² În mod surprinzător, Nash a demonstrat că *primul jucător are o strategie câștigătoare, dar nu se știe care e aceasta*. Ideea este că, dacă al doilea jucător ar avea o strategie câștigătoare, primul i-ar putea-o fura și imita după ce ar fi făcut prima mutare la întâmplare, această primă mutare fiind fără importanță: dacă cumva, mai târziu, strategia i-ar cere să facă acea mutare, ar avea-o deja făcută și ar putea face o altă mutare la întâmplare.

Abia în 1957, datorită rubricii lui Martin Gardner din *Scientific American*³, s-a înțeles că Polygon și Hex sunt unul și același joc, descoperit independent și cu motivații diferite de Hein în 1942 și de Nash în 1948. Pentru detalii însă, ar trebui citită cartea *Hex. Povestea completă*, de Ryan Hayward și Byarne Toft⁴, darea de seamă definitivă asupra nașterii și teoriei acestui fascinant joc.

STRATEGII DE RĂZBOI

Go

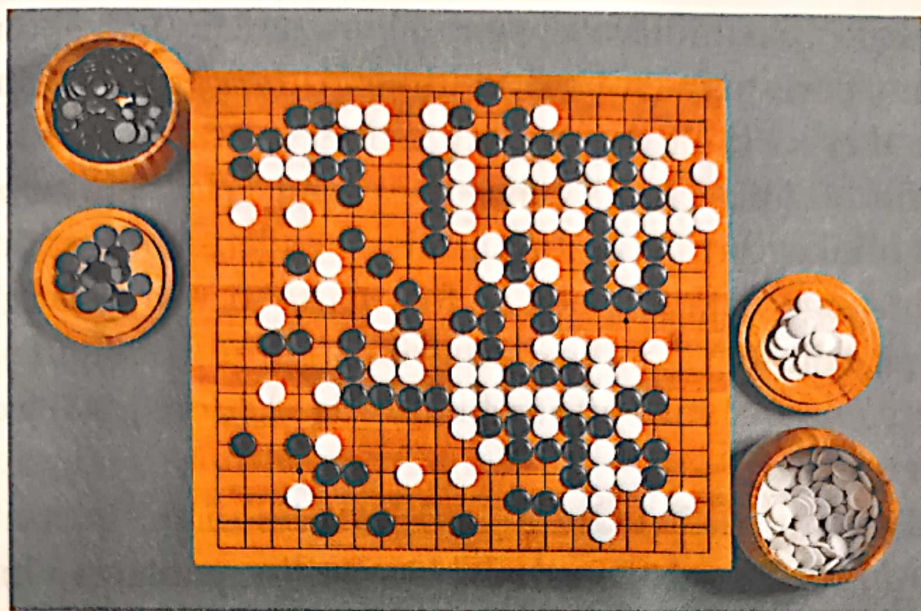
Orientul și Occidentul sunt antitetice nu doar geografic, ci și cultural: în particular, prin felul cum se antrenează pentru luptă practicând diferite jocuri de război.

1. Vezi secțiunea „Sfaturi pentru frizeri“.

2. Vezi secțiunea „Doamna e cucerită“.

3. Vezi secțiunea „Jocuri“.

4. *Hex. The Full Story*, Rutledge, 2019.



O partidă de Go

Kriegsspiel, inventat de prusaci pe la începutul secolului XIX, de exemplu, se trăgea din șah și era bazat pe o mulțime complicată de piese și reguli. Versiunea sa cea mai simplă constă în a pune jucătorii să joace o partidă de șah normală, dar fără ca unul să vadă mutările celuilalt, acestea putând fi deduse numai indirect, din informațiile furnizate de arbitru, care spune care anume mutări sunt permise, care piese au fost capturate sau cărora li s-a dat șah.

În schimb *go*, inventat de chinezi cu cel puțin 2.500 de ani în urmă, se bazează pe o structură extrem de simplă: toate piesele au aceeași valoare, sunt de numai două culori, și singurul obiectiv al jucătorilor e să ocupe teren și să cucerească piesele adversarului, încercuindu-le. Tabla se numește *goban* și constă dintr-un caroiaj 19 pe 19 de linii ortogonale cu 361 de intersecții, pe care jucătorii plasează alternativ piesele: 181 pentru negru, care mută primul, și 180 pentru alb, care, de obicei, e culoarea jucătorului mai puternic.

Go-ul a fost exportat în Japonia în 735 și a devenit rapid joc național, de la samurai la țărani. Dovadă stă al treilea capitol din *Povestea lui Gengji* (1021), de Murasaki Shikibu, în care e descrisă o partidă încrâncenată. *Maestrul de go* (1951), de Yasunari

Kawabata*, Premiul Nobel pentru literatură în 1968, spune, în schimb, povestea adevărată a ultimei partide jucate de Shusai, cel de-al 21-lea și ultim „papă” al go-ului: așa-numitul Hohinbo, care din 1612 până în 1936 moștenește titlul de la propriul predecesor, ori îl cucerea la un turneu al претенdenților, păstrându-l apoi întreaga viață. Kawabata a fost martor ocular al acelei partide epice din 1938, în care jucătorii s-au înfruntat de 15 ori pe parcursul a șase luni, s-au gândit timp de 54 de ore și au efectuat 237 de mutări.

După inițierea în cultura și spiritul acestui joc furnizate de romanul lui Kawabata, cel mai bun mijloc pentru a-i învăța regulile înșelător de simple e lectura cărții *Scurt tratat despre subtila artă a jocului de go* (1969), scrisă de scriitorul Georges Perec, de matematicianul Pierre Lusson și de scriitorul-matematician Jacques Roubaud.¹ Ultimii doi învățaseră jocul de la profesorul lor Claude Chevalley, unul dintre fondatorii miticului grupul Bourbaki. La rândul lor, Lusson și Roubaud erau membri ai nu mai puțin miticului grup OuLiPo, format din literați și matematicieni: o operă tipic oulipiană e *Epsilon* (€) a lui Roubaud², care conține 361 de sonete diferite din punct de vedere geometric și organizate ca mutările unei partide de go.

Din punct de vedere matematic însă, go e un joc „aproape banal”, în sensul că cel care mută primul are o strategie pentru remiză: e suficient să plaseze prima piesă în centrul tablei, iar apoi să imite simetric mutările adversarului. Astfel, va împiedica adversarul să aibă o strategie câștigătoare, dar nu se știe dacă există strategie câștigătoare pentru primul jucător sau dacă, într-adevăr, maximumul pentru el e strategia de remiză.

Mai interesant e faptul observat de John Conway în 1970, anume că finalurile partidelor de go se descompun de obicei

* Humanitas, București, 2007 (n. tr.).

1. *Petit traité invitant à la découverte de l'art subtil du go*, Christian Bourgois, Paris, 1969.

2. Gallimard, Paris, 1967.

într-o sumă de jocuri, jucate în puncte diferite ale tablei. Observație care l-a condus la o teorie generală *Asupra numerelor și jocurilor* (1976), din care au apărut așa-numitele *numere supra-reale*, care extind, pe de o parte, numerele reale din analiza matematică și, pe de altă parte, numerele transfinite din teoria mulțimilor.¹

În schimb, din punct de vedere informatic, simularea pe computer a jocului de go s-a dovedit mult mai complicată decât simularea șahului. Ne-am fi putut da seama *a priori*, estimând configurațiile posibile ale pieselor, circa 10^{47} pe tabla de șah, circa 10^{170} pe *goban*. Lucru confirmat *a posteriori* de faptul că programul Deep Blue a reușit să bată campionul mondial de șah încă din 1997, în timp ce a mai fost nevoie de douăzeci de ani, plus trecerea la rețelele neurale, până când programul AlphaGo să ajungă să bată un jucător de nouă *dan* în 2016: întrecerea e povestită în documentarul *AlphaGo* (2017), pe YouTube.

Capacitatea lui AlphaGo de a juca împotriva lui însuși și de a învăța singur a dus rapid la programe încă și mai super-umane. În 2017, AlphaZero a învățat în câteva ore să joace șah mai bine decât programul campion mondial Stockfish 8, arătând că raportul dintre om și mașină e deja depășit: mașinile fac de-acum totul între ele, fără (și mai bine decât) noi.

MARELE JOC

Life

Una dintre temele romanului *Kim* (1901), de Rudyard Kipling, e „Marele Joc care nu încetează niciodată, zi și noapte, în toată India”. Era vorba despre jocul geopolitic al celor două superputeri imperiale de atunci, în care ursul rus presa subcontinentul indian pentru a ajunge la ocean, în timp ce leul britanic încerca

1. Vezi secțiunea „Omagiu lui Conway”.

să-l împiedice, prin controlul asupra Asiei centrale, în general, și al Afganistanului, în particular. Durata jocului era potențial nelimitată, iar romanul risca previziunea că „Marele Joc nu se va termina până când nu vor fi cu toții morți”.

Oricât de mari, jocurile marilor puteri, de pe orice table de joc și din orice perioade istorice, nu sunt totuși decât sărmene sub jocuri al unuia mult mai mare care le depășește în spațiu și timp: jocul vieții, în care a fost deja implicată întreaga noastră planetă de patru miliarde de ani și jumătate și care se va sfârși doar când nu va mai exista nici o ființă vie. Studiul științific al regulilor, al condițiilor inițiale și al dezvoltării acestui joc se numește biologie.

Are însă și matematica o versiune a jocului vieții, nu întâmplător numit Life. Creatorul său a fost geniul multilateral John Conway¹, care, în 1970, a redus spațiul tridimensional și timpul continuu la o tablă de joc bidimensională infinită și la un timp discret. În orice moment, fiecare căsuță a tablei e aprinsă (vie) ori stinsă (moartă), după cum erau în momentul precedent cele opt căsuțe care-o înconjoară: mai precis, o celulă se naște dacă are exact trei vecine vii, moare de izolare dacă are mai puțin de două vecine vii, și supraviețuiește dacă are două sau trei vecine vii; moare de supraaglomerare dacă are mai mult de trei vecine vii.

O partidă de Life începe aprinzând un număr finit de celule, apoi jocul continuă automat, aplicând în fiecare moment, întregii table, regulile descrise, care constituie o versiune ale legilor evoluționismului lui Darwin și Malthus. Interesant e că, în ciuda simplificării radicale operate de Conway, jocul său e pe cât de complicat posibil: Life este, de fapt, o mașină Turing universală, în sensul că poate simula orice calcul efectuat de orice computer, dacă se alege configurația inițială finită potrivită de celule aprinse și stinse.

1. Vezi secțiunea „Omagiu lui Conway”.

Implicațiile filozofice ale acestui joc sunt profunde. Multă vreme s-a crezut că un univers trebuie să fie ceva foarte complicat, pentru a permite evoluția sistemelor vii capabile de autoreproducere. În schimb, regulile jocului Life arată că viața apare spontan, chiar și în urma unor reguli foarte simple, putând fi deci considerată un fenomen de rutină mai degrabă decât expresia unor condiții excepționale ale universului în care trăim. În particular, nu e nevoie să postulăm vreun *fine tuning* [reglaj fin] al constantelor universale ale fizicii și al condițiilor inițiale ale universului, așa cum sugerează faimosul „principiu antropic“.

Au existat, de fapt, și înainte de Conway tentative de simulare a sistemelor cu autoreproducere cu ajutorul unor automate celulare de tipul Life: în particular, aceea de pionierat introdusă de John Von Neumann în cartea *Theory of Self-Reproducing Automata* (completată după moartea autorului, în 1966, de Arthur W. Burks)¹, și aceasta bazată pe o tablă de joc în care fiecare celulă evoluează în funcție de starea celor opt care o înconjoară, cu diferența că aici fiecare celulă se poate afla în 29 de stări, nu doar în două. Life e o simplificare extremă a problemei lui Von Neumann, dar inițial n-a fost gândit ca soluție a ei: dimpotrivă, a apărut ca un adevărat joc, iar descoperirea unei configurații autoreproducătoare simple a fost o surpriză, nu doar un prim pas în demonstrarea universalității jocului.

Prima descriere a jocului Life a apărut în 1970, dar nu într-o revistă științifică, ci la rubrica lui Martin Gardner din *Scientific American*², pentru că încă era considerat un simplu divertisment. Azi, tratarea cea mai completă a jocului vieții se găsește în cartea *Universul recursiv* (1985), de William Panstone³, consacrată în întregime jocului Life.

1. Vezi secțiunea „Jocul vieții“.

2. Vezi secțiunea „Jocuri“.

3. *The recursive universe. Cosmic complexity and the limits of scientific knowledge*, Dover Publications, 2013.

Iar în *Un geniu la joacă* (2015), de Siobhan Roberts¹, biografia sa autorizată, Conway povestește cum l-a descoperit și de ce-l ura, până la a nu mai vrea să audă de el: fiind rezultatul său matematic cel mai cunoscut, a sfârșit prin a pune în umbră alte rezultate ale sale mult mai importante. *Such is Life*, am zice, sau, mai degrabă, asta-i viața unui matematician atât de popular.

OMAGIU LUI CONWAY

Privește și spune

Printre atâtea victime ale coronavirusului în lume, una dintre cele mai ilustre a fost tocmai John Conway, mort la Princeton în 11 aprilie 2022, la optzeci și doi de ani, considerat mintea cea mai strălucită și originală din matematica modernă. Chiar și cititorul nespecialist se poate convinge citind nu doar biografia *Geniu la joacă* abia citată, ci și *Cartea numerelor*², scrisă de Conway împreună cu Richard Guy.

Sunt cărți care scot limpede în evidență abordarea dublu ludică a lui Conway față de matematică: fie la propriu, privind teoria jocurilor, fie la figurat, de practicare a divertismentului. Chiar și când aceasta din urmă părea un scop în sine, nefiind evident, la prima vedere, cum se leagă de matematică.

Un exemplu tipic pentru această atitudine a lui e articolul *Un pi chimic* (2016), în care Conway ne învață cum să memorăm 1.180 de cifre ale lui π într-un mod mai puțin brutal decât învățându-le pe de rost, una după alta. Ideea e să memorăm întâi tabelul periodic al elementelor, asociind apoi câte zece cifre zecimale fiecărui element din cele 118. Ca să nu strice simetria, Conway propune să-l asociem pe 3 inițial neutronului, considerat ca atom neutru cu zero electroni, numit Neutroniu, cu simbolul Nn.

1. *Genius at play. The curious mind of John Horton Conway*, Bloomsbury, 2015.

2. *The Book of Numbers*, Copernicus, New York, 1996.

Începutul poezioarei ar fi deci 3Nn, 1415926535H, 8979323846He etc. Tehnica aceasta ajută nu doar la memorare, spărgând șirul de cifre în mici blocuri ancorate în elementele chimice, dar ne permite și să spunem rapid care e a n-a cifră, cel puțin până la a 1.180-a, fără să recităm poezia întreagă până la acea cifră: asemănător oarecum seriilor descoperite în 1995 de David Bailey, Peter Borwein și Simon Plouffe, care însă funcționează în baza 66, nu în baza 10.

Un alt amuzament al lui Conway a plecat de la celebra ghicitoare a șirului numeric 1, 11, 1211 etc. în care fiecare element e obținut pronunțând numărul cifrelor elementului precedent: anume, „1“, „un 1“, „2 unu“, „un 2, un 1“ etc. De unde și numele *Look and say*, „Privește și spune“, al acestui șir bizar.

Pentru mulți dintre noi, lucrurile se termină aici. Nu și pentru Conway, care a mers mult mai departe. În articolul *Strania și minunata chimie a dezintegrării audioactive* (1986), a descoperit că lungimea fiecărui termen al șirului e cu aproximativ 30% mai mare decât lungimea termenului precedent. Mai precis, raportul de creștere dintre doi termeni consecutivi ai șirului tinde la un număr irațional, numit *constanta lui Conway*, care e bine aproximat de 1,3035 și e unica soluție reală și pozitivă a unei anumite ecuații de gradul 71.

Ca și cum asta n-ar fi fost de ajuns, șirul se sparge încetîșor în bucățele (subșiruri) „atomice“ care nu mai comunică între ele: de unde termenul jucăuș de „dezintegrare audioactivă“, atribuit de Conway întregului proces, motivat și de descoperirea excepțională că acești atomi sunt în număr de exact 92, ca și elementele chimice de până la uraniu!

Moștenirea lăsată de Conway matematicii include și *numerele suprareale*, și ele derivând dintr-o observație asupra jocurilor: în particular, de la finalurile partidelor de go.¹ Modalitatea cea mai plăcută și mai puțin dificilă de a face cunoștință cu ele

1. Vezi secțiunea „Strategii de război“.

e prin nuvela lui Donald Knuth *Numere suprareale*¹, o povestire concisă în care aflăm cum „doi studenți au descoperit matematica pură și au găsit adevărata fericire“.

Toți cunoaștem numerele reale, cu care putem face cele șase operații uzuale: adunare și scădere, înmulțire și împărțire, ridicare la putere și extragere de radicali. Cu numerele ordinale și cardinale infinite descoperite de Georg Cantor, în schimb, putem face numai operațiile directe (adunare, înmulțire și ridicare la putere), dar nu și inversele lor, rezultatele fiind oricum nesatisfăcătoare: de exemplu, un cardinal infinit nu se schimbă dacă e adunat sau înmulțit cu el însuși.

Aritmetica infinită a lui Cantor nu era, deci, decât o versiune palidă a celei finite, dar numerele suprareale ale lui Conway remediază problema. Nu doar că includ toate numerele lui Cantor, dar mai și adaugă o puzderie de altele, permițând toate operațiile care se pot face cu numerele reale, cu rezultate surprinzătoare: de exemplu, există trei versiuni canonice ale infinitului (potențial, actual și absolut), iar infinitul potențial rezultă că este rădăcina absolută a infinitului actual. În plus, împărțind un număr întreg la un infinit se obține un număr infinitezimal și viceversa, unificând astfel infiniturile lui Cantor cu infinitezimalele lui Abraham Robinson, la ale căror nume trebuie adăugat acum, în empireul matematic, cel al lui Conway.

1. *Surreal Numbers*, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1974.

CURIOZITATE

OMLETĂ MATEMATICĂ

Oologie

Pentru foarte mulți, prototipul dilemei insolubile e întrebarea: „Ce a fost întâi, oul, sau găina?” Ceea ce e surprinzător, cel puțin printre oamenii de știință, pentru că răspunsul e deja cunoscut de multă vreme. Într-adevăr, *dogma centrală a biologiei moleculare*, proclamată de Francis Crick în 1956, stabilește că se merge dinspre informația genetică înspre proteine, dar niciodată invers: așadar, întâi oul, apoi găina.

E cât se poate de firesc ca biologia să aibă de spus asemenea lucruri interesante despre ouă – și nu numai. Dar ce legătură poate fi între matematică și ouă? În primul rând, ne-ar putea învăța cum să le împărțim fără să le spargem, rezolvând probleme ca aceasta:

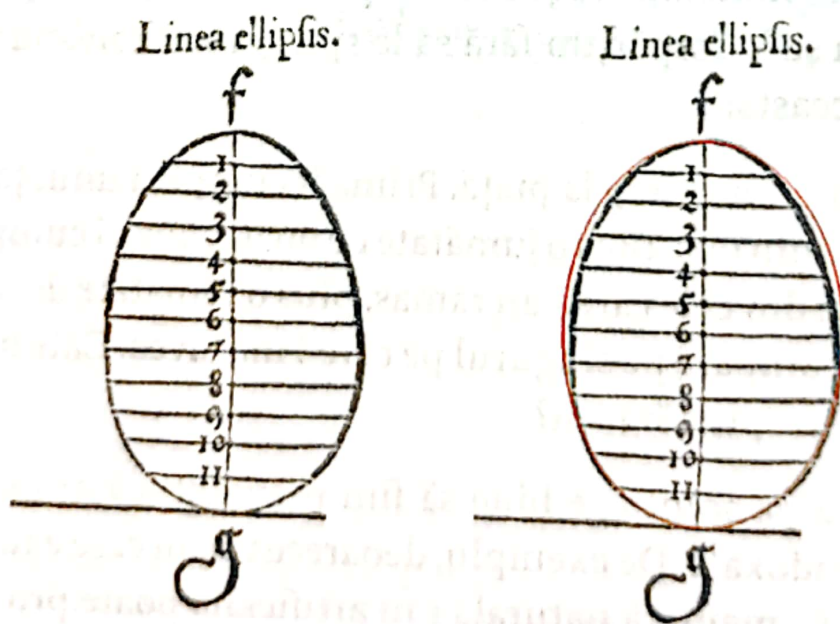
Trei gospodine merg la piață. Prima îi cumpără unui țăran jumătate din ouă, plus o jumătate de ou. A doua, îi cumpără jumătate din cele care i-au rămas, plus o jumătate de ou. A treia i-l cumpără pe singurul pe care-l mai avea. Câte ouă a avut la început țăranul?

Înainte de a da soluția, e bine să fim preveniți că *aritmetica ouălor* e paradoxală. De exemplu, deoarece un ou care e împărțit în două în manieră naturală sau artificială poate produce doi gemeni, o jumătate de ou plus o jumătate de ou e același

lucru cu două ouă, nu cu unul! Iar cum două ouă care se unesc produc în mod normal un singur fiu, un ou plus un ou echivalează cu un ou, nu cu două! Așadar, pentru ouă: $1/2 + 1/2 = 2$ și $1 + 1 = 1$.

În ciuda acestor paradoxuri, problema gospodinelor se poate rezolva cu aritmetica clasică după cum urmează. Cum a doua dintre ele a cumpărat jumătate din ce lăsase prima, plus o jumătate de ou, țăranul a rămas cu jumătate din ce lăsase prima gospodină, mai puțin o jumătate de ou, în total un ou (cât cumpărase a treia gospodină). La fel, cum prima gospodină cumpărase jumătate din total plus o jumătate de ou, a doua gospodină avusese la dispoziție jumătate din total minus o jumătate de ou, care, cum am văzut, înseamnă trei ouă; de unde totalul fusese de șapte ouă.

Se poate merge cu raționamentul înapoi la infinit, continuând să înmulțim cu doi și adăugând unu, obținând progresia 1, 3, 7, 15, 31 etc. Acest procedeu e o adevărată găină cu ouăle de aur, care ouă chiar celebrele *numere ale lui Mersenne*. Anume, acelea obținute scăzând 1 din puterile lui 2, adică din 2, 4, 8, 16, 32 etc. Sau, dacă preferați, numerele care se pot scrie în sistem binar (baza 2) ca șiruri de 1, adică: 1, 11, 111, 1111, 11111 etc.

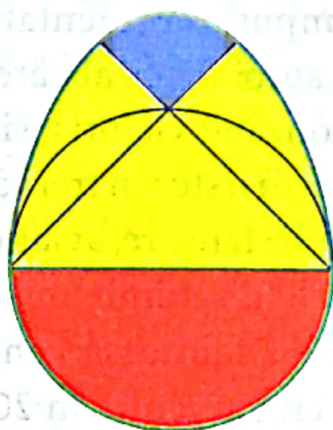


Elipsa în formă de ou a lui Dürer și cea corectă (în roșu)



Trecând la punctul de vedere al *geometriei ouălor*, acestea au formă de cerc strivit și simetric într-o singură direcție, lucru care le diferențiază de alte curbe ovale, cum e elipsa, care sunt simetrice pe două direcții. Există evident diferite tipologii de ouă, cele mai simple presupunând doar construcții euclidiene. Dar, spre deosebire de ce a scris și desenat Albrecht Dürer în *Patru cărți despre măsură* (1525), secțiunile conice produc elipse, nu ouă.

Cea mai simplă construcție, pe care copiii o învață de obicei la școală când desenează *ouă de Paște*, se obține lipind între ele patru arce de cerc. Primul e semicercul inferior al cercului dat. Alte două sunt arce de pe cercurile cu centrul în capetele diametrului orizontal și de rază egală cu diametrul însuși. Figura se completează cu arcul de cerc cu centrul în polul nord al cercului inițial.



Luete împreună, aritmetica și geometria ouălor formează *oologia matematică*, numele provenind de la grecescul *oion*, „ou“. Este, pe de o parte, o ramură a oologiei *tout court*, care studiază tot ce ține de ouăle păsărilor. În particular, faptul că un ou singur e masculin, dar două ouă împreună devin feminine: problemă pe care, în matematică, o au și cercurile, pătratele, dreptunghiurile etc.

Pe de altă parte, oologia matematică e o ramură a *zoologiei matematice*, disciplină care studiază din punct de vedere matematic tot ce ține de *zoon*, „animal“. Iar existența sa confirmă faptul că nimic nu-i e străin matematicii: nici chiar ouăle, întregi sau sparte.

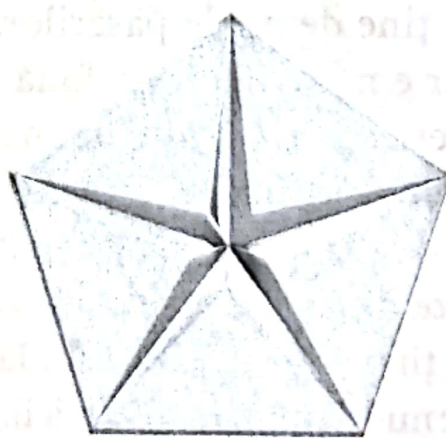
MAȘINI CU PLĂCUȚE GEOMETRICE

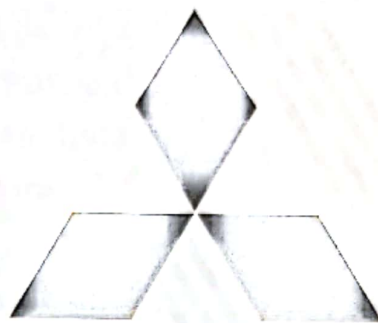
Forma logourilor

Poate părea *fake news*, dar e pur și simplu un *true fact*: compania auto chineză Geely a creat în 2019 o nouă mașină electrică numită *Geometry*. Primul model se numește *Geometry A*, unde, potrivit declarațiilor lui An Conghui, președinta Geely auto, litera A vine de la Arhimede. Dar geometria pare să se oprească la cuvântul însuși, conform limbii engleze: în rest, logoul e al companiei Geely și nu pare a avea vreun interes matematic special, spre deosebire de cele ale multor altor mărci automobilistice.

Cercul e probabil figura cea mai folosită în acest scop, dar și cea mai puțin inventivă, dacă nu e umplută cu alte materiale. Mercedes-Benz, de exemplu, pune în cerc o *stea cu trei vârfuri*, obținând un logo compus, reprezentând fuziunea din 1926 între două companii auto: Benz, al cărei logo original era o coroană de laur simbolizând victoria, și Mercedes, inițial numită Daimler, care folosea o stea în trei vârfuri, pentru a indica o triplă piață de vehicule: terestre, aviatice și maritime.

O *stea cu cinci colțuri*, în schimb, înscrisă într-un *pentagon regulat*, era încă din 1962 faimoasa Pentastar a lui Chrysler, până la fuziunea cu Fiat survenită în 2014. Se pare că, la origine, steaua indica cele cinci subdiviziuni automobilistice ale companiei, dar, în sine, simbolul e esențialmente pitagoreic: într-adevăr, Pitagora și discipolii săi sunt cei care au descoperit





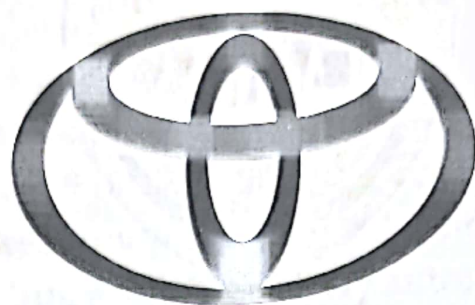
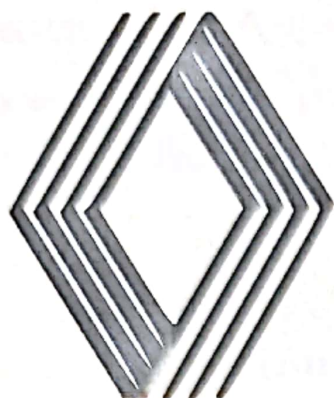
extraordinarele proprietăți de simetrie ale pentagonului și ale diagonalelor sale care se află în proporția de aur cu laturile.

Stelele Mercedes și Chrysler sunt reprezentate de grupurile diedrale D_3 și D_5 , care descriu respectiv simetriile triunghiului și pentagonului regulate. Grupul D_3 conține șase elemente: trei rotații de 120, 240 și 360 de grade, și trei simetrii față de înălțimile triunghiului. Analog, grupul D_5 constă din 10 elemente: cinci rotații și cinci simetrii.

În loc să înscrie un triunghi într-un cerc, Lancia face încă din 1929 contrariul: înscrie un cerc, care reprezintă volanul, într-un triunghi cu laturi curbilinii, amintind de un scut. Acesta din urmă e, de fapt, un *triunghi Reuleaux*, în care fiecare latură e arcul de cerc care unește două vârfuri și are centrul în vârful opus. E vorba despre o figură cu lățime constantă, chiar dacă s-ar putea crede că numai cercul are această proprietate.

Și triunghiul din logoul Mitsubishi e foarte special, și constituie o combinație genială a stemelor a două familii: trifoiul de stejar al familiei Tosa și cele trei romburi suprapuse ale familiei Iwasaki. Aceasta din urmă a cumpărat în 1870 compania de expediție a primeia și a refondat-o ca Mitsubishi, nume care înseamnă literal „trei frunze de castan de apă”, care sunt romboidale, și, din punct de vedere figurativ, „trei romburi”.

Logoul datează din 1914 și se construiește pornind cu un triunghi echilateral, împărțindu-l în nouă triunghiuri echilaterale mai mici, eliminându-le apoi pe cele trei dispuse în centrul laturilor. Rezultatul e un *trifoi romboidal*, cu aria egală cu



două treimi din aria triunghiului inițial, fiind primul pas în construcția fractalului *Mitsubishi*, a cărui dimensiune Hausdorff e aproximativ 1,63: egală, deci, cu raportul dintre logaritmul lui 6 (numărul de triunghiuri mici rămase) și logaritmul lui 3 (inversul factorului de reducere liniară a triunghiului).

Două logouri matematice recente, din 1972 și respectiv 1989, aparțin mărcilor Renault și Toyota. Primul e un logo de autor, operă a lui Victor Vasarely și a fiului său Yvaral: cine cunoaște lucrările artistului nu se va mira că i-a trecut prin minte să transforme frontiera rombului original într-o *bandă Möbius*, suprafață neorientabilă paradoxală, cu o singură frontieră și o singură față. Al doilea logo e o compunere de *trei elipse*, două dintre ele stilizând inițiala T a numelui Toyota și reprezentând raportul dintre producător și cumpărător, în timp ce a treia reprezintă piața care le înglobează, ale cărei spații goale constituie potențialul de creștere al firmei, confirmare a puterii metaforice a matematicii și a obiectelor sale.

ȘAH LA TRAFIC.

Geometria taxiului

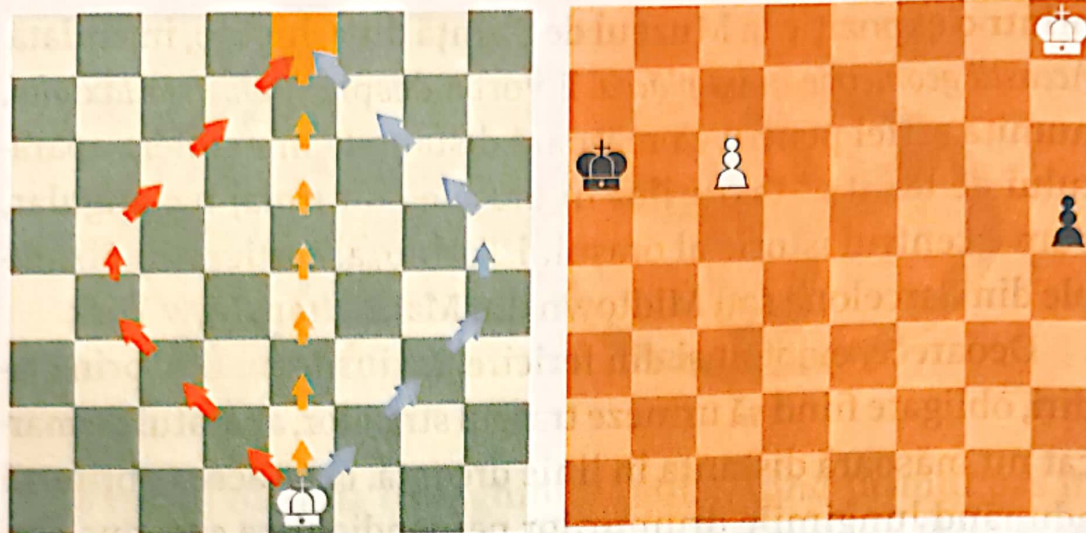
Pe la finele secolului XIX, matematicianul german Hermann Minkowski a introdus o geometrie surprinzătoare și interesantă, făcută cunoscută publicului larg în 1952, de Karl Menger

printr-o expoziție la Muzeul de Știință din Chicago, intitulată *Această geometrie îți va plăcea*. E vorba despre *geometria taxiului*, numită astfel pentru că măsoară distanțele în maniera aparatului de taxat al taxiurilor în orașele cu caroiă rectangular, cum e centrul istoric al orașului Torino, al cartierului Eixample din Barcelona sau Midtown din Manhattan, New York.

Deoarece, evident și din fericire, taxiurile nu trec prin clădiri, obligate fiind să urmeze traseul străzilor, aparatul de marcat nu măsoară distanța în linie dreaptă, ci pe aceea obținută adunând lungimile drumurilor perpendiculare care duc dintr-un punct în altul. Astfel că, în geometria taxiului, ca să calculăm distanța dintre două puncte nu folosim teorema lui Pitagora, adică nu extragem rădăcina pătrată a sumei pătratelor diferențelor de coordonate – dimpotrivă, adunăm direct aceste diferențe.

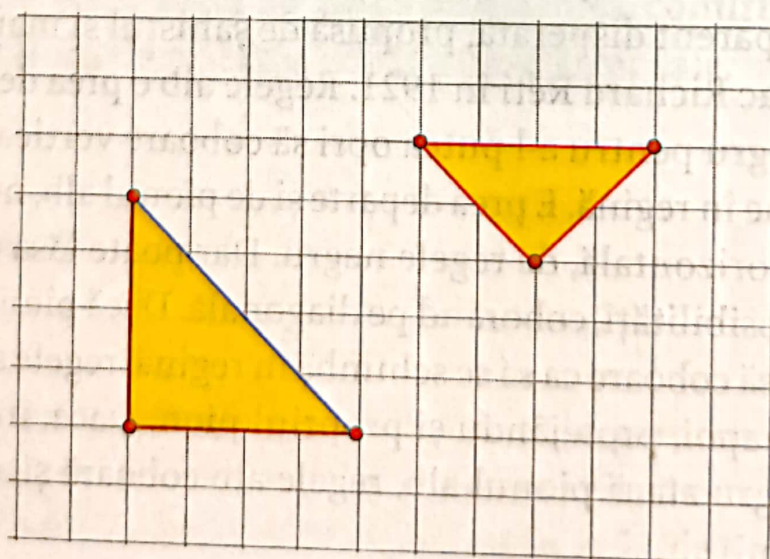
Ceea ce face ca geometria taxiului să poată fi numită chiar *geometria șahului*, pentru că e vorba exact despre lungimea pe care o măsoară tura între două căsuțe de pe tabla de șah. Aceeași distanță o măsoară și nebunul, de astă dată mergând pe diagonale. Cât despre rege sau regină, ei pot folosi geometria taxiului deplasându-se în moduri diferite dintr-un punct în altul, mereu cu același număr de mișcări: de exemplu în linie dreaptă, în zigzag ori pe diagonală.

Tocmai această posibilitate oferă o cale de ieșire dintr-o situație aparent disperată, propusă de șahistul și matematicianul slovac Richard Réti în 1921. Regele alb e prea departe de pionul negru pentru a-l putea opri să coboare vertical și să se transforme în regină. E prea departe și de pionul alb, nu-l poate apăra, pe orizontală, de regele negru. Dar poate lăsa deschise ambele posibilități, coborând pe diagonală. Dacă pionul negru se decide să coboare ca să se schimbe în regină, regele alb poate să urce înapoi, protejându-și propriul pion. Dacă, în schimb, regele negru atacă pionul alb, regele alb coboară și atacă pionul negru.



Geometria regelui și problema lui Réti

Interesul pentru geometria taxiului, ori a șahului, vine din faptul că satisface toate axiomele uzuale ale geometriei, mai puțin *criteriul LUL* (Latură-Unghi-Latură): „Două triunghiuri, care au două laturi și unghiul dintre ele respectiv egale, sunt egale.” Într-adevăr, dacă ne amintim că distanța dintre două puncte se măsoară mișcându-ne în direcții perpendiculare, și nu pe diagonală, atunci e ușor să construim două triunghiuri dreptunghice cu catete egale și cu ipotenuze de lungimi diferite. Concluzia e că toate proprietățile din geometria euclidiană care nu mai sunt valabile în geometria taxiului nu pot fi demonstrate (în geometria euclidiană) fără criteriul LUL.



În figură se văd două triunghiuri asemenea care nu au laturile proporționale: dacă ar fi proporționale, cum catetele sunt egale, ar fi și ipotenuzele egale. Cel din dreapta, în particular, e un foarte ciudat *triunghi dreptunghic echilateral*, în care, evident, pătratul ipotenuzei nu poate fi egal cu suma pătratelor catetelor. Considerând una dintre catete ca bază, el poate fi privit și ca *triunghi isoscel cu unghiurile de la bază neegale*. Rezultă că proprietățile citate ale triunghiurilor asemenea, ale triunghiurilor isoscele și ale triunghiurilor dreptunghice, în particular, teorema lui Pitagora, depind esențial de criteriul LUL.

Cui i se pare că geometria taxiului se comportă ciudat cu triunghiurile, să arunce o privire asupra conicelor. În geometria euclidiană, elipsele și hiperbolele se pot defini în două moduri echivalente: cu referire la un focar și la o directoare, sau cu referire la două focare. Lucrul acesta nu mai e adevărat în geometria taxiului, deci nici această echivalență, a celor două definiții posibile ale elipsei și hiperbolei, nu e demonstrabilă fără criteriul LUL.

Într-adevăr, folosind definiția cu focar și directoare, în geometria taxiului se obțin linii poligonale cu patru laturi. Cu două focare, se obțin figuri diferite în funcție de poziția focarelor. Cine are chef să se amuze desenând aceste conice, va descoperi că geometria taxiului îi rezervă multe surprize: cercurile, de exemplu, vor fi pătrate, întru definitivă confuzie a taximetriștilor și a clienților lor.

LANȚUL DE LA BICICLETĂ

Roți pătrate

Bicicleta cu roți pătrate pe care au fost nevoiți să pedaleze candidații la proba de matematică a bacalaureatului din 2017 este o metaforă a felului în care se pot înfrunta cel mai bine dificultățile vieții. Într-adevăr, e evident că, pe o șosea plană, optimale

sunt roțile rotunde. Dar când ieși de pe șosea și ai de-a face cu un teren neregulat, ele nu mai sunt așa: de asta s-a inventat *mountain bike*, care are roți rotunde, dar cauciucuri câțuși de puțin netede, tocmai ca să adere mai bine la teren. Oricum, pe teren accidentat, se poate și dansa cu mountain bike.

Amuzant e la *ciclocross*. Mai puțin, de exemplu, când ai de rostogolit stâlpi enormi și foarte grei din piatră, cu secțiune pătrată, ca să-i aduci la un templu, așa cum erau nevoiți să facă egiptenii, cu riscul de a-și lăsa degetele sub stâlpi – dacă nu ale lor, măcar pe ale sclavilor. Așa că au descoperit că transportul devenea mult mai ușor dacă se pava strada cu un covor de trunchiuri de lemn tăiate în patru și aliniat ca niște felii care să compună un șir de cocoșe.

Soluție ingenioasă, dar nu optimală. Din punct de vedere matematic, problema de rezolvat constă tocmai în a ne închipui că avem o roată pătrată (secțiunea orizontală a stâlpului) și a găsi forma curbei pe care s-o aibă cocoșele pentru ca roata să se rostogolească optim.

Pentru ca roata să se rostogolească fără salturi și să nu alunece pe cocoșă, mișcarea trebuie să pună în corespondență biunivocă punctele roții și ale cocoșei: astfel, lungimea unei cocoșe (a arcului de curbă) trebuie să fie egală cu latura roții pătrate. Așa se determină lungimea arcului de curbă, dar nu încă forma lui.



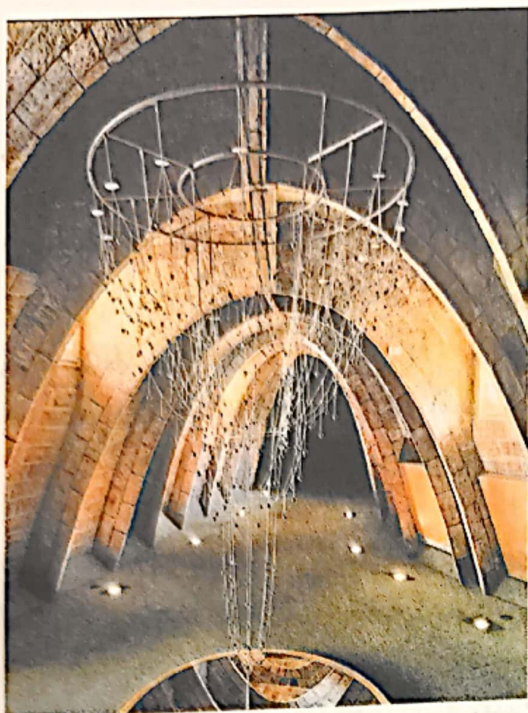
Se poate cere ca (bary)centrul pătratului să stea întotdeauna pe verticala punctului de contact cu curba. În acest caz, roata exercită aceeași presiune în fiecare punct al curbei cocoșei, iar aceasta e exact definiția *lănțișorului*: curba după care se orientează automat un lanț omogen, fixat la capete, sub efectul propriei greutate (care e egală în fiecare punct, pentru că am presupus că materialul e omogen) – desigur, în cazul nostru, e vorba de un lănțișor răsturnat. Determinăm astfel forma arcului de curbă, dar nu și lățimea lui, adică distanța la care trebuie plasate capetele.

E însă natural să impunem ca vârful roții să cadă vertical în punctele de contact dintre două cocoșe consecutive: altfel spus, cele două laturi care formează vârful respectiv să fie tangente la cele două cocoșe. Ceea ce înseamnă că tangentele la capetele cocoșelor trebuie să fie înclinate la 45 de grade. Sau, echivalent, că două cocoșe consecutive trebuie să se întâlnească în unghi drept, ca laturile pătratului.

Odată înțeleasă șmecheria, problema poate fi rezolvată și pentru roți de forma unui poligon regulat, cu oricât de multe laturi (mai multe decât patru). Lungimea cocoșei trebuie să fie întotdeauna egală cu latura, iar distanța dintre capetele lănțișorului e determinată astfel ca tangenta la capete să fie înclinată la un unghi egal cu jumătatea unghiului poligonului: de exemplu, 36 de grade pentru un pentagon, 30 pentru hexagon, circa 26 pentru heptagon etc.

Cazul roții circulare nu e decât cazul limită al unui poligon cu un număr infinit de laturi și unghiuri de 180 de grade: adică un lănțișor întins în linie dreaptă. Altfel spus, terenul optim de parcurs cu bicicleta cu roți rotunde e planul. Sau, dacă, preferați, un șir de cocoșe infinitezimale plate.

Evident că problema roților pătrate se poate rezolva și analitic, nu doar geometric. În care caz, ea se reformulează ca o ecuație diferențială care va avea drept soluție ecuația lănțișorului. În soluția lor, egiptenii aproximau această curbă cu un arc de cerc. Galilei a crezut că e vorba de o parabolă. Mai târziu



Lănțișoarele folosite la construcția turelor de la Sagrada Família

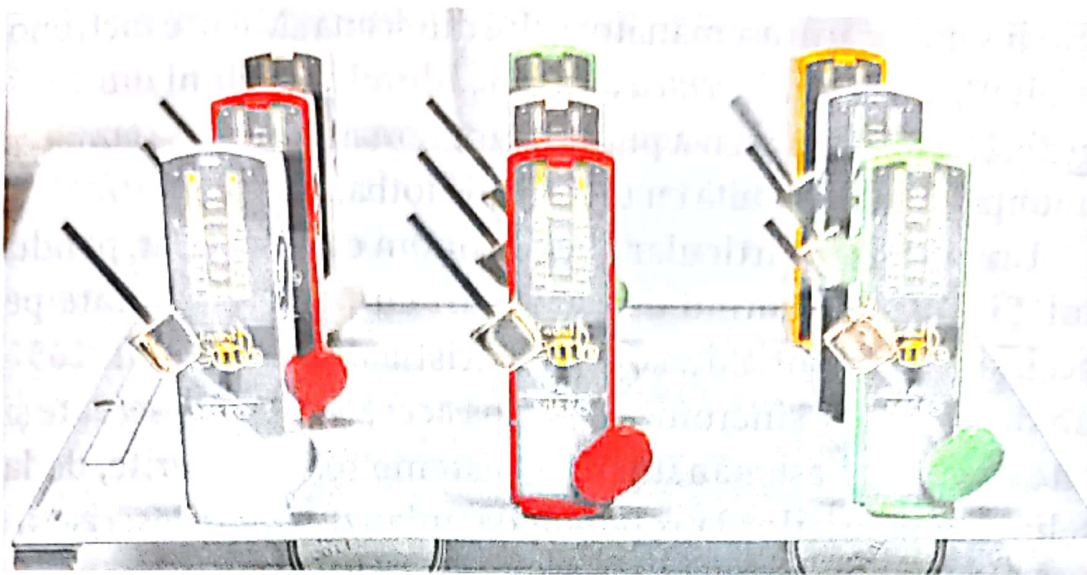
însă, s-a descoperit că e vorba de un cosinus hiperbolic, analogul pentru hiperbole al cosinusului definit pe cerc.

Azi, lănișorul nu e folosit atât la cocoase bune pentru roți pătrate ori poligonale, ci mai degrabă la construirea podurilor suspendate ori a turelor ascuțite, cum sunt cele de la Sagrada Família, din Barcelona, opera lui Antonio Gaudí, sau pentru arce ca Gateway, din Saint Louis, construit de Eero Saarinen. Iat-o deci ca instrument foarte sofisticat și deloc futil al arhitecturii moderne.

DANSUL METRONOMULUI

Pendulul lui Huygens

Se găsește pe YouTube un film foarte special, *Sincronizarea cuantică a 100 de metronoame* (2015), care arată exact ce promite: 100 de metronoame cu aceeași perioadă, puse în mișcare la întâmplare, fiecare separat, și care în scurt timp ajung să se sincronizeze în mod automat.



Trucul e că metronoamele sunt dispuse pe un plan elastic care, la rândul lui, intră în vibrație în urma mișcării lor. Planul absoarbe vibrațiile fiecărui metronom și le-o transmite tuturor pe a sa proprie, până când sistemul format din metronoame și plan vibrează în fază. Iar fenomenul e stabil, în sensul că se verifică și atunci când metronoamele nu au toate aceeași perioadă, cu condiția ca diferențele să nu fie mari.

Probabil că, dacă György Ligeti ar fi văzut acel video, altfel ar fi compus *Poemul simfonic pentru 100 de metronoame* (1962) pentru grupul dadaist Fluxus. Partitura aceasta foarte specială precizează că metronoamele pot fi cumpărate sau luate cu împrumut, și că fiecare dintre cei 10 „muzicieni” trebuie să manevreze câte 10. La prima comandă a „dirijorului”, fiecare „muzician” încarcă parțial sau integral cele 10 metronoame ale sale și le setează pe 10 perioade diferite. La a doua „comandă”, toți „muzicienii” acționează pe cât de simultan posibil toate „instrumentele”.

„Concertul” constă în sunetele celor 100 de metronoame, amplificate corespunzător de megafoane. Iar „divertismenul”, în faptul că, așa cum bine intuise Ligeti, în timpul spectacolului, metronoamele ajung să se sincronizeze aleator și diferit, mai mult sau mai puțin evident și persistent. Distracția însă nu e garantată: de exemplu, prima audiție, în Olanda, pe 13 septembrie 1963, a

produs un vacarm asemănător celui din scena „Moarte metronomului!”, din *Repetiție pentru orchestră*, filmul lui Fellini din 1979, astfel că înregistrarea n-a putut fi programată la TV, așa cum era anunțat, fiind înlocuită cu un meci de fotbal.

Un exemplu particular de metronom este, evident, pendulul. Și tocmai studiind două ceasuri cu pendul montate pe același postament a descoperit Christiaan Huygens, în 1657, un tip analog de sincronizare. După aceea, au fost observate și alte fenomene asemănătoare în sisteme foarte diferite, de la sclipirile licuricilor la ropotele de aplauze, toate descrise în foarte frumoasa carte despre sincronie a lui Steven Strogatz.¹

Ca să rămânem însă la pendulele originare, Galilei observase deja, pe ultima pagină din *Discursuri și observații matematice în jurul a două noi științe* (1638):

Atârnați bile de plumb, ori alte corpuri grele asemănătoare, de trei fire de lungimi diferite, dar astfel ca, în timpul în care cel mai lung dintre ele face două vibrații, cel mai scurt să facă patru, iar mijlociul trei. Puse în mișcare toate trei deodată și apoi lăsate în voia lor, se va observa o vagă împletire a firelor aceloră, cu diferite întâlniri, dar în așa fel încât, la fiecare a patra oscilație a celui lung, toate trei ajung la capăt simultan, iar apoi, dacă pornesc din nou, refac ciclul: amestecul acesta de vibrații e acela care, făcut de corzi, produce în auz octava cu cvinta la mijloc.

Un alt filmuleț de pe YouTube, realizat la Harvard de data aceasta și numit *Unde ale pendulului* (2010), arată fenomenul descris de Galilei în forma lui generalizată, cu 15 pendule de lungimi crescătoare dispuse pe o aceeași coardă elastică: așa-dar, cu perioade diferite între ele. Pendulele sunt puse în mișcare simultan, în fază: o situație opusă celei dinainte, în care metronoamele aveau aceeași perioadă, dar erau puse în mișcare defazat.

1. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*, Allen Lane, 2003.

La început, pendulele oscilează independent, fiecare conform propriei perioade. Coarda absoarbe vibrațiile fiecăruia dintre ele și le transmite tuturor propria vibrație, până când sistemul reunit al pendulelor vibrează ca și cum ar fi toate legate rigid. Dar această mișcare în fază nu e stabilă, și sistemul se întoarce pe același drum, punând în evidență, într-o mișcare de du-te-vino, diferite sincronizări mai mult sau mai puțin evidente, ca în cazul metronoamelor lui Ligeti, într-un fel de *Mic poem simfonic pentru 15 pendule*, anticipat deja de Galilei, conform fragmentului mai sus citat.

SFATURI PENTRU FRIZERI

Teorema lui Brouwer

Uneori îți crește barba în timpul interminabilelor discuții filozofice oțioase, dar barba însăși poate deveni obiect al unor interminabile și captivante discuții filozofice. O demonstrează un paradox expus de Bertrand Russell în *Filozofia atomismului logic* (1918), cunoscut azi ca „paradoxul frizerului”.

E vorba despre unul dintre multele născocite de Russell pentru a explica *urbi et orbi* un paradox mai tehnic, chiar de el găsit, în 1902, și care zdruncinase fundamentele matematicii. Forma populară în chestiune e următoarea:

Paradoxul meu e extrem de interesant. Poate fi modificat în diferite feluri, unele valide, altele nu. Odată, cineva mi-a prezentat o formă invalidă, întrebându-mă dacă un frizer se tunde pe sine sau nu. Se poate cădea de acord că un frizer îi tunde pe toți cei care nu se tund singuri și numai pe aceia, iar atunci întrebarea devine: cine îl tunde pe frizer?

Considerarea unui asemenea frizer e efectiv paradoxală, pentru că, dacă el nu se tunde, atunci e una dintre persoanele care sunt tunse de el, iar dacă se tunde singur, atunci e una dintre

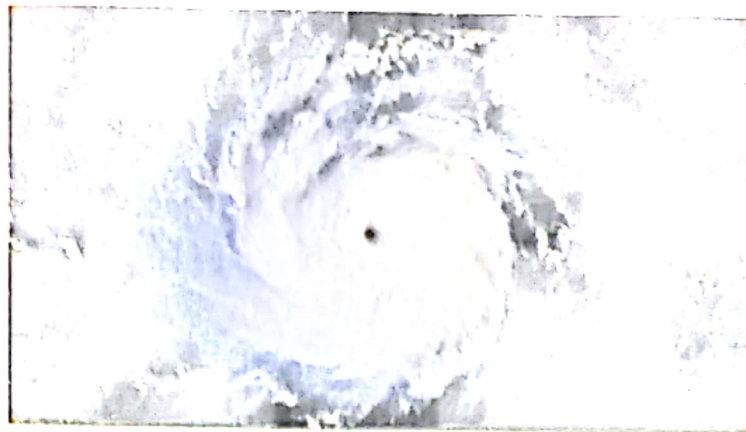
persoanele pe care nu le poate tunde. Ceea ce înseamnă pur și simplu că un asemenea frizer nu există. Sau, mai degrabă, că nici un frizer nu poate satisface condiția impusă. Această formă a paradoxului e deci inofensivă: tot ce arată e că s-a dat o definiție imposibilă.

Părul, de care se ocupă frizerii, e în sine interesant din punct de vedere matematic. Chelul David Hilbert¹, de exemplu, a spus odată, la curs, că știe că în amfiteatru se află un student cu cel mai mare număr de fire de păr. Demonstrația e simplă, pentru că fiecare student are un fir finit de fire de păr pe cap, iar în amfiteatru era un număr finit de studenți, astfel că studenții pot fi ordonați după numărul de fire de păr într-o listă finită, descrescătoare, care trebuie să aibă un prim element.

Evident că primul loc *ar putea* fi ocupat de mai mulți studenți cu același număr (maxim) de fire de păr. Dar, într-un oraș ca Roma, *trebuie* să existe cel puțin zece cetățeni cu același număr de fire de păr. Într-adevăr, sunt cam trei milioane de locuitori și putem presupune că măcar două milioane nu sunt cheli. Acum, numărul maxim de fire de păr pe cap la o persoană e de aproximativ două sute de mii. Așadar, numărul de persoane care nu sunt chele e de cel puțin zece ori mai mare decât numărul de fire de păr posibile: chiar dacă distribuția firelor de păr ar fi uniformă, trebuie să existe măcar zece repetiții ale aceluiași număr.

Demonstrațiile astea par niște șmecherii, dar sunt de fapt exemple tipice pentru ceea ce face în mod obișnuit matematica clasică. Doar în matematica constructivă nu se acceptă demonstrații pur existențiale, care nu furnizează exemple concrete pentru obiectele a căror existență o afirmă: în cazurile precedente, nu se admit demonstrații care nu indică în mod expres un student cu numărul maxim de fire de păr, ori zece romani cu același număr de fire de păr.

1. Vezi secțiunea „Îndoieli și certitudini“.

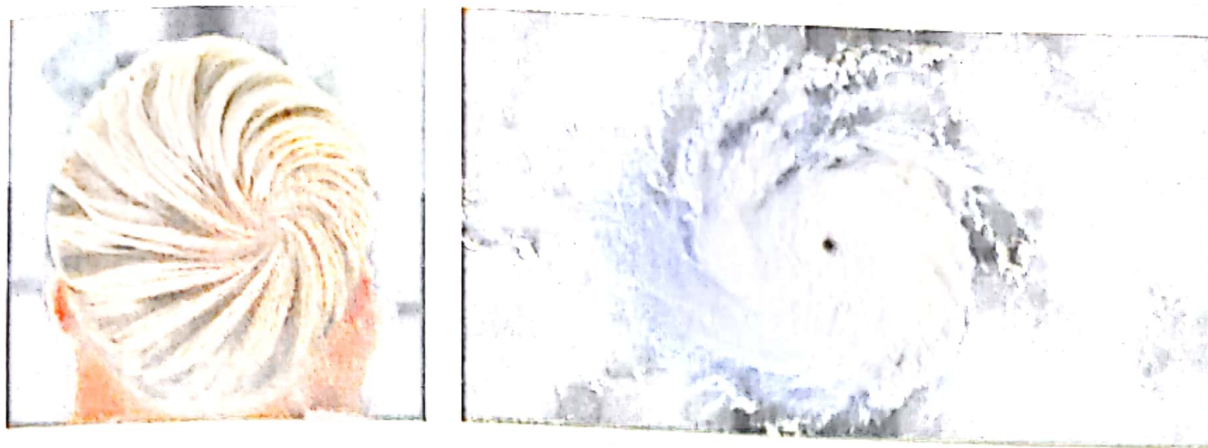


Matematica clasică însă nu se ocupă numai cu pieptănatul studenților și al romanilor, uneori piaptănă și mingi de tenis și, în general, mingi păroase: caz în care, celebra *teoremă de punct fix* a lui Brouwer demonstrează că e musai să existe un vârtej ori o cărare. Ceea ce explică de ce frizerii propun de obicei tocmai coafuri de acel tip, chiar dacă un cap normal (adică așezat pe un gât, nu acoperit complet cu păr) nu e o minge păroasă, iar în cazul acesta teorema nu funcționează: într-adevăr, părul se poate pieptăna spre spate.

În termeni matematici, teorema lui Brouwer spune că pe o suprafață echivalentă din punct de vedere topologic cu sfera nu există un câmp de vectori tangenți continuu și fără zerouri. Iar o aplicație a sa mai serioasă, la circulația atmosferică terestră, explică de ce există întotdeauna un punct de pe planetă în care nu e vânt deloc, punct care corespunde ochiului unui ciclon sau al unui anticiclon.

În schimb, găurile negre nu au păr și nici blană, conform terminologiei introduse de John Wheeler pentru o teoremă din relativitatea generală, potrivit căreia materia care cade într-o gaură neagră nu lasă urme „de păr” în afară de informația „corporală” asupra masei, sarcinii electrice și momentului cinetic.¹ N-are rost deci să încerci să tragi de păr gaura neagră ca s-o scoți la lumină.

1. Vezi secțiunea „Formule ecumenice”.



Matematica clasică însă nu se ocupă numai cu pieptănatul studenților și al romanilor, uneori piaptănă și mingi de tenis și, în general, mingi păroase: caz în care, celebra *teoremă de punct fix* a lui Brouwer demonstrează că e musai să existe un vârtej ori o cărare. Ceea ce explică de ce frizerii propun de obicei tocmai coafuri de acel tip, chiar dacă un cap normal (adică așezat pe un gât, nu acoperit complet cu păr) nu e o minge păroasă, iar în cazul acesta teorema nu funcționează: într-adevăr, părul se poate pieptăna spre spate.

În termeni matematici, teorema lui Brouwer spune că pe o suprafață echivalentă din punct de vedere topologic cu sfera nu există un câmp de vectori tangenți continuu și fără zerouri. Iar o aplicație a sa mai serioasă, la circulația atmosferică terestră, explică de ce există întotdeauna un punct de pe planetă în care nu e vânt deloc, punct care corespunde ochiului unui ciclon sau al unui anticiclon.

În schimb, găurile negre nu au păr și nici blană, conform terminologiei introduse de John Wheeler pentru o teoremă din relativitatea generală, potrivit căreia materia care cade într-o gaură neagră nu lasă urme „de păr” în afară de informația „corporală” asupra masei, sarcinii electrice și momentului cinetic.¹ N-are rost deci să încerci să tragi de păr gaura neagră ca s-o scoți la lumină.

1. Vezi secțiunea „Formule ecumenice”.

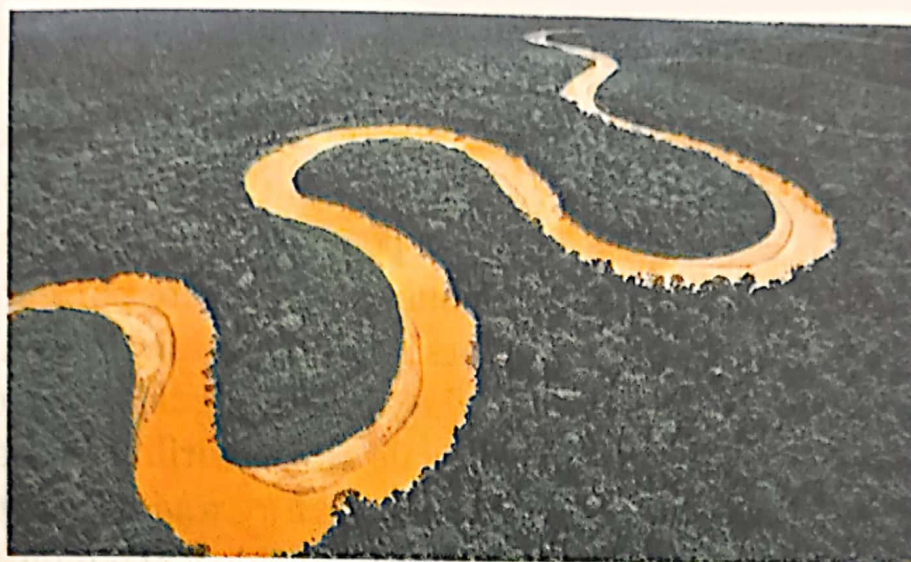
Prin Frigia, în Asia Mică, curge un râu numit Büyük Menderes în turcă, Maeandrum în latină și Maiandros în greacă. Parcursul său extrem de sinuos a dat naștere, încă din Antichitate, termenului „meandre”, a cărui origine o putem găsi deja în cartea a V-a a *Eneidei*: „victori chlamydem auratam, quam plurima circum purpura maeandro duplici Meliboea cucurrit”.*

Primul care a explicat tendința râurilor de a forma meandre a fost Albert Einstein: o deviere a albiei de la liniaritate produce un curent pe malul extern care erodează terenul și tinde să formeze un drum curbiliniu. Cu cât e mai mare curbura, cu atât mai mare e forța de eroziune: la limită, râul tinde să urmeze un traseu semicircular, care întâi îl face să se întoarcă, apoi să schimbe din nou parcursul într-unul semicircular.

În cazul optim, deci, traseul râului tinde la o succesiune de semicercuri de diametre variabile, dispuse în ordine pe segmentul care unește în linie dreaptă izvorul cu gura de vărsare. Cum lungimea fiecărui semicerc e egală cu raza înmulțită cu π , suma lungimilor diferitelor semicercuri, care nu e altceva decât lungimea reală a râului, va fi egală cu π înmulțit cu suma diferitelor raze, care nu e altceva decât jumătatea distanței dintre izvor și gura de vărsare.

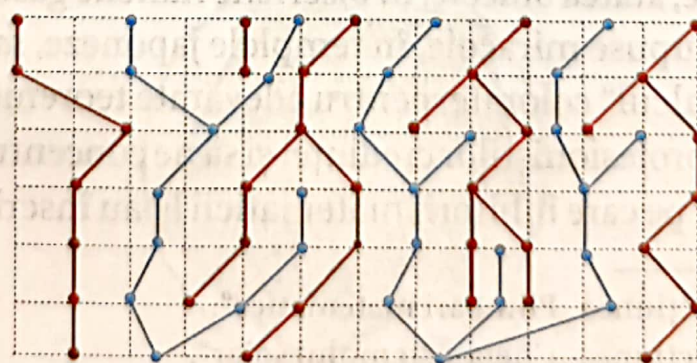
Un studiu despre *Meandrizarea râurilor ca proces autoorganizat* (1996), al geologului Hans-Henrik Stølum, a confirmat punctual că, în râurile terestre, media raportului dintre lungimea reală și jumătatea lungimii dintre izvor și gura de vărsare e puțin mai mare decât 3, în bună concordanță cu valoarea teoretică π calculată mai sus. Cea mai bună aproximație a lui π o dau râurile care coboară lin către mare, ca în Brazilia sau Siberia.

* Mândru suman, în urzeală de aur, a dat lui Cloanthus, purpură-având pe la poală-mprejur, cu dungă-ndoită (trad. George Coșbuc, Univers, București, 1980) (n. tr.).



Pe de altă parte, geomorfologul Adrian Scheidegger a propus în articolul „Un model statistic pentru canalele de drenaj intermontane” (1967) o metodă matematică pentru descrierea procesului de formare a râurilor. Model care constă pur și simplu într-o rețea triunghiulară orientată de sus în jos, în care fiecare punct de pe o linie e legat aleatoriu cu unul din cele două care-i corespund pe linia următoare.

Modelul descrie corect comportarea șiroaielor de ploaie care pot fi observate pe fereastra trenului, sau mașinii în timpul unei averse: în fiecare punct al ferestrei, direcția pe care o ia o picătură de apă pare să fie întâmplătoare, chiar dacă știm că e reglată de legile fizice ale gravitației și frecării. Picăturile se unesc apoi în mici șuvoaie din ce în ce mai voluminoase, într-un proces care simulează nu doar confluența afluenților unui râu, ci și pe aceea a venelor și arterelor în sistemul vascular, sau a dendritelor în sistemul nervos.



Folosind metode probabiliste, în particular pe aceea a drumurilor aleatorii (*random walk*)¹, modelul poate furniza informații cantitative. De exemplu, se poate calcula probabilitatea ca două drumuri aleatorii care pornesc dintr-un anumit punct să se întâlnească într-un altul. Sau poate fi calculată relația dintre suprafața determinată de două drumuri care pornesc dintr-un anumit punct și se întâlnesc în altul, și lungimea lor: se obține astfel o relație enunțată de geomorfologul John Hack în „Studiu al profilurilor longitudinale ale cursurilor de apă din Virginia și Maryland” (1957), cunoscută ca *legea lui Hack*, potrivit căreia aria unui bazin de drenaj e proporțională cu o putere a lungimii râului principal.

Exponentul puterii care se obține prin metoda lui Scheidegger este $3/2$, furnizând numai o primă aproximație a valorii medii a marilor fluvii (Nil, Congo, Amazon, Mississippi), care este 2: motivul este că, în realitate, terenul nu e dispus conform unei rețele regulate infinite. În mod surprinzător, totuși, exponentul $3/2$ e același care leagă anul planetar de raza medie a orbitei în legea a treia a lui Kepler:² și această lege e doar o primă aproximare și poate fi considerată o versiune metaforică a legii lui Hack, aplicată râurilor cosmice determinate de deplasarea planetelor în bazinul timpului.

IMPERIUL SOARELUI TANGENT

Sangaku

Câte bordeie, atâtea obicei: în bisericile italiene găsești ex voto, pentru presupuse miracole, în templele japoneze, *sangaku*, sau „tablite de calcul” colorate, pentru adevărate teoreme. Să lăsăm miracolele profesioniștilor credinței și să ne concentrăm asupra rezultatelor pe care iubitorii matematicii le-au înscris pe aceste

1. Vezi secțiunea „Plimbări matematice”.

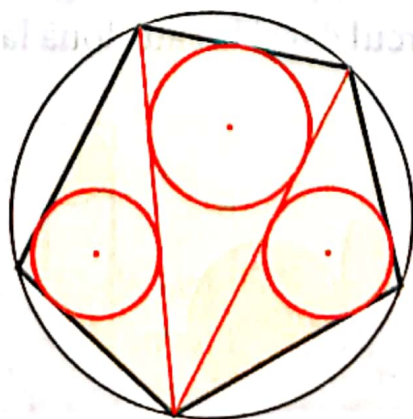
2. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar”.

tăblițe de lemn din Japonia, tăblițe care se atârnă de tavanul templelor și capelelor – au fost confecționate în cele două secole de ruptură de Occident (1639–1854): într-adevăr, în așa-numita perioadă Edo, până la deschiderea către Occident din a doua jumătate a secolului XIX, în Japonia s-a dezvoltat o geometrie autohtonă, independentă de metodele tradiționale.

Sangaku erau oferite în dar de samurai, negustori și țărani câte uneia dintre nenumăratele divinități șintoiste și budiste venerate în locurile sfinte în care erau atârnate, constituind, probabil, tot atâtea provocări intelectuale adresate vizitatorilor acelor locuri, sau reclamă făcută școlilor asociate lor. Problemele tratate se referă aproape întotdeauna la cercuri, elipse și sfere tangente, iar nivelul de dificultate merge de la elementar la universitar și peste: soluția presupune uneori doar rigla și compasul, alteori geometrie și analiză superioare.

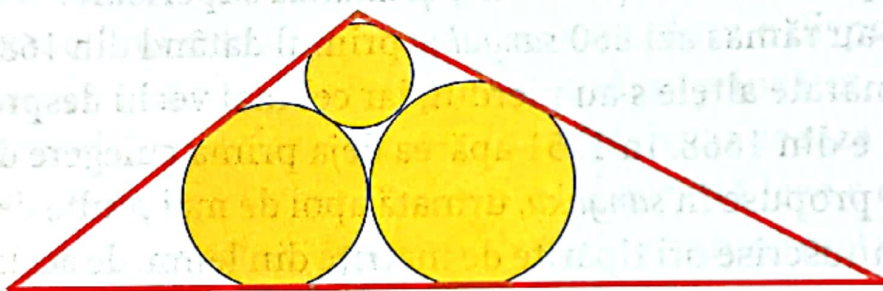
Ne-au rămas azi 880 *sangaku*, primul datând din 1683, dar nenumărate altele s-au pierdut, iar cel mai vechi despre care se știe e din 1668. În 1751 apărea deja prima culegere de probleme propuse în *sangaku*, urmată apoi de mai multe de acest fel, manuscrise ori tipărite de matrițe din lemn, de același tip ca stampele celebre *ukiyo-e* ale lui Utamaro, Hokusai și Hiroshige care au avut o atât de mare influență asupra pictorilor occidentali din a doua jumătate a secolului XIX.

Adesea, rezultatele de pe *sangaku* erau absolut originale. Un exemplu e ceea ce azi se numește, pe bună dreptate, *teorema japoneză*, datând de pe la 1800: un poligon convex e ciclic (adică are

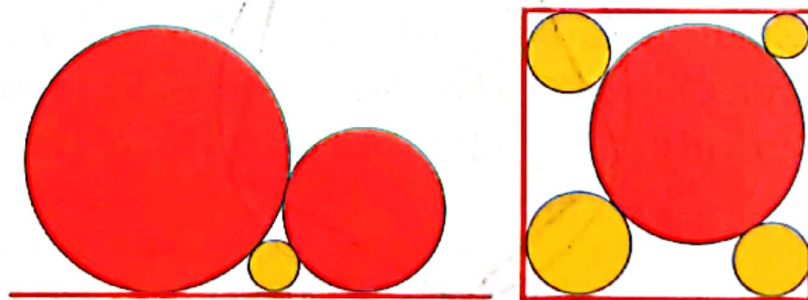


vârfurile pe un cerc) dacă și numai dacă suma razelor cercurilor înscrise în triunghiurile oricărei triangulări ale sale e constantă.

Sau cea care azi se numește *teorema lui Ajima-Malfatti*, care permite să înscrii într-un triunghi trei cercuri, fiecare tangent celorlalte două și la două laturi ale triunghiului. Malfatti a găsit soluția în 1803, crezând că a rezolvat *problema marmurei*, care cerea să se minimizeze pierderea de material atunci când vrem să extragem trei coloane cilindrice dintr-un bloc de marmură în formă de prismă triunghiulară (altfel spus, în secțiune, să găsim trei cercuri interioare unui triunghi și de arie totală maximă). Chiar dacă cercurile lui Malfatti nu sunt *nici odată* soluția optimă a problemei, construcția are interes în sine și fusese deja propusă într-un *sangaku* de Naonobu Ajima (1732–1798), de unde dubla atribuire din numele teoremei.

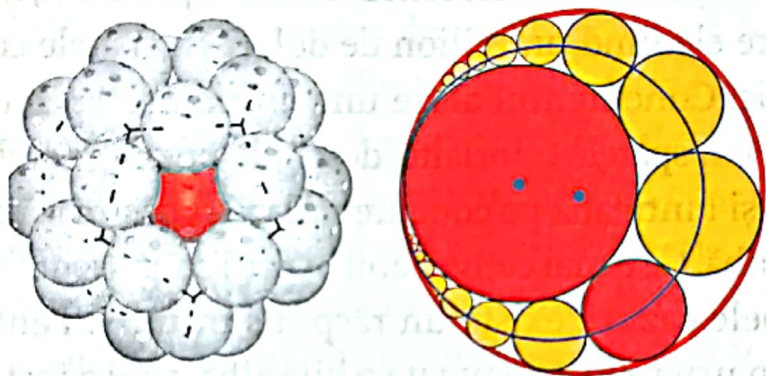


Asemănătoare sunt două probleme găsite pe *sangaku* din prefectura Gumma. În prima, din 1824, se dau două cercuri tangente între ele și la o dreaptă și se cere să se găsească un al treilea cerc, tangent la dreaptă și la cele două cercuri date. În a doua, din 1874, se dă un pătrat cu un cerc fixat în interiorul lui (dar nu tangent la laturi) și se cere să se găsească patru cercuri, fiecare tangent la cercul dat și la câte două laturi ale pătratului.



Complet diferită, și mult mai spectaculoasă, e o problemă din 1798: să distribui 30 de sfere mici, identice, așa încât fiecare să fie tangentă la alte patru și toate să fie tangente la una centrală. Dacă soluțiile problemelor anterioare se pot găsi ușor, chiar prin metoda analitică, aceasta e destul de neașteptată: centrele celor 30 de sfere mici trebuie să stea la jumătatea laturilor unui dodecaedru regulat.

Și mai veche e problema din 1788, în care e vorba despre o serie infinită de cercuri care formează o adevărată *mandala*: date două cercuri tangente exterior și ambele tangente interior la un al treilea cerc, să se înscrie între ele două lanțuri infinite



de cercuri tangente, ca în figura de mai sus. Soluția stabilește un echivalent japonez a ceea ce noi numim *teorema cercului* a lui Descartes.

Ultima problemă care se cere rezolvată nu e de natură matematică, ci sociologică: ce e mai bine, ex voto-uri atârinate în bisericile italiene, ori *sangaku* atârinate în templele japoneze?

CE UȘĂ DESCHIDEM?

O problemă a lui Carroll

Problemele pernei (1895), de Lewis Carroll, sunt o serie de ghicitori matematice pentru insomniaci. La numărul 5 din listă găsim următoarea problemă: O urnă conține o bilă care are

probabilitatea 50% să fie albă și 50% să fie neagră. Mai punem în urnă o bilă albă, agităm urna și extragem la întâmplare o bilă, vedem că e albă. Care e probabilitatea ca bila rămasă în urnă să fie albă?

O versiune a aceleiași ghicitori, dar ca joc de televiziune, a fost propusă în 1990 în *Parade*, un supliment duminical distribuit cu sute de ziare americane, de o anume Marilyn vos Savant, cunoscută deja ca autoare a unei cărți în care susținea că teoria relativității a lui Einstein e greșită. Cunoscută însă și pentru că a fost inclusă ani de-a rândul în *Guinness Book* ca având cel mai mare IQ înregistrat vreodată: 228!

Jocul presupune un concurent având în față trei uși, în spatele uneia dintre ele fiind un milion de dolari, în spatele celorlalte două, nimic. Concurentul alege una dintre uși. Prezentatorul, care știe ce e-n spatele celorlalte, deschide una în spatele căreia nu-i nimic și-l întreabă pe concurent dacă-și păstrează alegerea sau o schimbă. Ce e mai convenabil pentru concurent?

În ambele cazuri, există un răspuns intuitiv. Pentru bile, deoarece în urnă a fost adăugată o bilă albă, apoi a fost extrasă una albă, probabilitatea ca bila rămasă să fie albă sau neagră e cea de la început, adică 50%. Pentru uși, cum după ce prezentatorul a deschis o ușă, mai rămân două, fiecare are probabilitate 50% să ascundă milionul, deci n-are nici o importanță pe care din ele o alegi, iar schimbarea alegerii nu influențează rezultatul.

Lucrurile s-ar fi oprit aici dacă doamna Vos Savant n-ar fi declarat că, schimbându-și alegerea, concurentul își dublează șansele. Argumentul său a fost că, dacă nu se schimbă ușa aleasă inițial, sunt două șanse de a pierde din trei: într-adevăr, se câștigă numai dacă ușa aleasă inițial ascundea milionul. Pe când, dacă se modifică alegerea inițială, șansa de a pierde e una din trei: într-adevăr, se pierde numai în cazul în care ușa aleasă inițial ascundea milionul. Schimbarea alegerii crește deci probabilitatea de câștig de la $1/3$ la $2/3$.

Chestiunea asta a dezlănțuit protestul a zeci de mii de cititori, o mie dintre ei fiind matematicieni profesioniști, care au asaltat revista cu scrisori pline de insulte. Imperturbabilă, doamna a prezentat un al doilea argument. Cu prima sa alegere, concurențul îl obligă pe prezentator să deschidă una dintre ușile care nu ascund milionul. Dacă nu se modifică alegerea, e ca și cum ai juca singur și se câștigă numai dacă ușa inițială fusese cea corectă. În schimb, dacă se schimbă opțiunea inițială, atunci se joacă împreună cu prezentatorul și se câștigă numai dacă ușa corectă e una din cele două nealese inițial. Așadar, schimbarea opțiunii crește probabilitatea de câștig de la $1/3$ la $2/3$.

La început, n-a crezut nici celebrul matematician maghiar Paul Erdős¹, care s-a convins doar când colegul lui, Andrew Vázsonyi, a calculat probabilitatea folosind așa-numita *metodă Monte Carlo*: simulând jocul pe computer, alegând aleatoriu dacă să schimbe sau nu opțiunea inițială, și observând când se câștiga și când nu. Rezultatul a fost că, efectiv, schimbând opțiunea inițială, se câștiga de două ori din trei. Simularea aceasta a dat, mai târziu, titlul autobiografiei lui Vázsonyi: *În spatele cărei uși se află Cadillacul*.²

De data asta s-au înclinat și experții, admițând că au greșit. Dar ar fi trebuit să găsească încă de la început răspunsul corect, dat fiind că rezultă în mod banal dintr-o teoremă fundamentală demonstrată de Thomas Bayes în *Studiu despre soluția unei probleme de probabilități* (1763), în care stabilește legătura dintre probabilitățile absolute și relative.

În cazul particular al problemei bilelor, cazurile posibile sunt trei. Dacă bila extrasă e cea introdusă înainte, atunci cea rămasă e cea inițială, deci poate fi albă sau neagră (două posibilități). Dacă bila extrasă e cea inițială, atunci bila rămasă e cea introdusă ulterior, deci e albă (o posibilitate). Din cele trei

1. Vezi secțiunea „Chat în rețea“.

2. *Which Door Has the Cadillac. Adventures of a Real-life Mathematician*, Writer's Club Press, 2002.

cazuri, bila rămasă e de două ori albă: așadar, probabilitatea de a fi albă e două treimi.

Lucru înțeles încă de la început de Lewis Carroll, iar azi știut de toată lumea. Chiar și de profesorul jucat de Kevin Spacey în filmul *21* (2008), care folosește problema ușilor ca test de inteligență pentru a alege studenții care urmează să-l ajute să devalizeze cazinoul la *blackjack*.

JEEPURI ÎN DEȘERT

O problemă a lui Alcuin

Trama filmului lui Bernardo Bertolucci *Il tè nel deserto* (1990), adaptat după romanul omonim al lui Paul Bowles*, se desfășoară în 1947, în deșertul marocan.

Coincidență, din același an datează articolul „Problema jeepului”, publicat de Nathan Fine în *American Mathematical Monthly*, care tratează realimentarea în deșert: mai precis, cum să maximizezi distanța pe care o poate acoperi un jeep folosind o anumită cantitate de benzină. Evident, jeepul nu poate transporta decât o cantitate limitată și fixă de carburant în rezervor și în canistre, dar poate descărca o parte în anumite puncte din deșert, întorcându-se să realimenteze la bază.

Problema nu e doar teoretică. O necesitate similară a apărut în operațiunile de transport aerian din China în timpul celui de-Al Doilea Război Mondial, și se pot ușor imagina nenumărate alte situații practice asemănătoare, de la expedițiile antice la călătoriile interplanetare. Mai mult, problema e atât de naturală, încât o variantă a sa fusese deja considerată de Alcuin din York în cea mai veche colecție de ghicitori matematice în latină (circa 800):¹ într-adevăr, problema 52 întreabă cum să

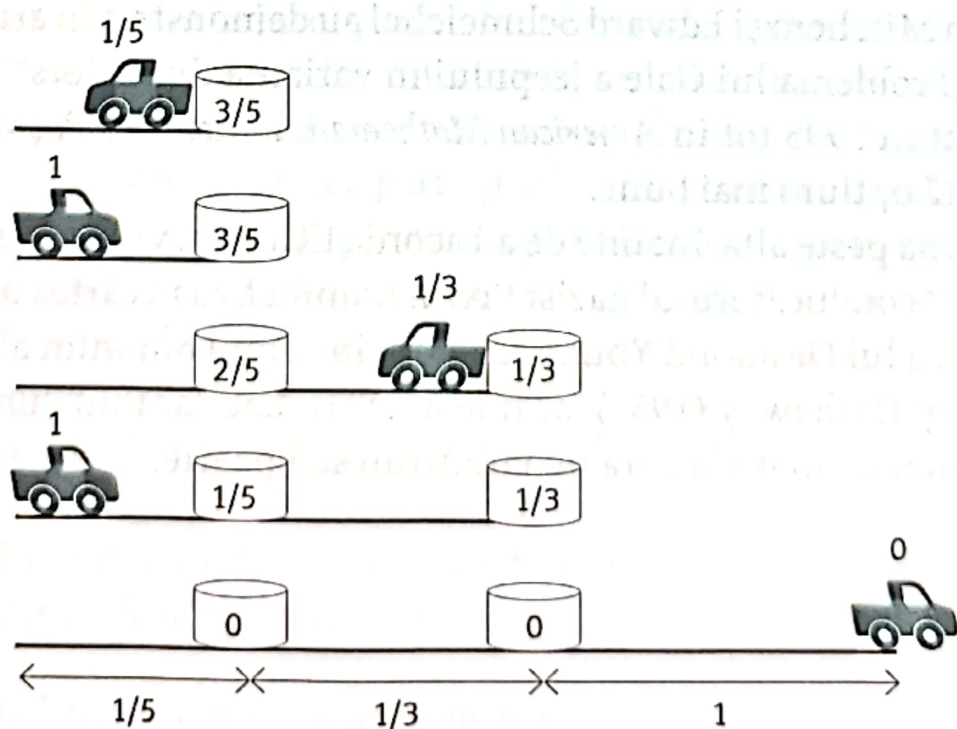
* *Ceai în Sahara*, Humanitas, București, 2005 (n. tr.).

1. *Propositiones ad ecuendos juvenes*.

transporta o anumite cantitate de grâu, hrănind în același timp și cămila care-o transportă.

În cazul jeepului, să presupunem că la plecare sunt disponibile n unități de carburant, fiecare egală cu cantitatea totală pe care o poate transporta jeepul. Dacă $n = 1$, cu un plin, jeepul acoperă o anumită distanță pe care o considerăm ca unitate de măsură a spațiului parcurs. Dacă $n = 2$, jeepul poate consuma o treime din carburantul avut la dispoziție, apoi poate descărca jumătate din ce-a rămas (adică $1/3$ din plin) și poate folosi restul ($1/3$) ca să revină la bază și să realimenteze: după ce consumă iar o treime, ajunge în punctul unde a descărcat rezerva, realimentează și în total parcurge o distanță egală cu $1 + 1/3$.

Dacă $n = 3$, jeepul poate consuma o cincime din carburant, descarcă $3/5$, folosește cincimea rămasă ca să revină la bază și să realimenteze. După ce consumă încă o cincime, ajunge în punctul unde și-a lăsat $3/5$ și descarcă alte $3/5$, revine la bază și realimentează încă o dată. Se întoarce la punctul unde are păstrate $6/5$, deci are în total $10/5 = 2$ plinuri la dispoziție, ceea ce reduce problema la pasul precedent. În total, în cazul $n = 3$ poate parcurge $1 + 1/3 + 1/5$.



În general, cu n unități de carburant, prin metoda aceasta, jeepul poate parcurge $1 + 1/2 + 1/3 + 1/5 + \dots + 1/2^{n-1}$ unități de spațiu. Cu fiecare creștere a lui n se obține un nou termen al așa-numitei „serii armonice“, despre care se știe că tinde la infinit. Așadar, nu există limite pentru distanța pe care o poate parcurge jeepul dacă are la dispoziție carburant nelimitat, chiar dacă la fiecare drum el poate transporta numai o cantitate limitată.

Ca întotdeauna, odată găsită soluția, ne putem acum juca cu ea. Mai ales dacă ești un teoretician al jocurilor, ca David Gale, care în articolul „Încă o dată despre jeep“, publicat în 1970, tot în *American Mathematical Monthly*, și-a pus problema iterată și a rezolvat-o. Într-adevăr, când sunt implicate mai multe jeepuri, există soluții colective mai economice decât simpla alăturare a soluțiilor individuale precedente. În particular, cu cât e mai mare numărul de jeepuri avute la dispoziție, cu atât mai mică e cantitatea de carburant necesar fiecăruia.

În schimb, Gale a lăsat deschisă problema voiajului dus-întors, când carburantul trebuie să fie la dispoziție și la dus, și la întoarcere. E clar că se poate adopta soluția dinainte separat pentru cele două direcții, dar Alan Hausrath, Bradley Jackson, John Mitchem și Edward Schmeichel au demonstrat în articolul „Problema lui Gale a jeepului în varianta dus-întors“, publicat în 1995 tot în *American Mathematical Monthly*, că și aici există opțiuni mai bune.

Una peste alta, înainte de a-i acorda titlul de „vulpea deșertului“ conducătorului nazist Erwin Rommel, ca în cartea omonimă a lui Desmond Young (1950) și în filmul omonim al lui Henry Hathaway (1951), ar fi fost de studiat dacă nu cumva vreun matematician era mai îndrituit să-l poarte.

A TRĂI ȘI A MURI

GÂNDURILE SERIOASE ALE UNUI MISTIC

Pascal

Albert Einstein spunea că știința nu e o republică bananieră în care se face revoluție în fiecare an. Ceea ce nu împiedică, uneori, să apară revoluții în știință la fiecare doi ani. Așa s-a întâmplat în Franța, când René Descartes a publicat în 1637 *Geometria*, iar Girard Desargues, în 1639, *Schiță despre ce se întâmplă atunci când sectionăm un con cu un plan*: două lucrări fundamentale care inaugurează, respectiv, geometria analitică și geometria proiectivă.

Chiar dacă avea să fie uitată pentru mai bine de două sute de ani, lucrarea lui Desargues a circulat printre intelectualii care se adunau în jurul părintelui Marin Mersenne, un călugăr din ordinul minoriților intrat în istoria matematicii pentru numerele prime care-i poartă numele.¹ În afară de Desargues, din acest cerc mai făcea parte și avocatul Etienne Pascal.

Acesta semăna un pic cu Leopold Mozart, în sensul că își îndemna fiul și pe cele două fete la o viață de competiție precoce, supunându-i unei educații excesive și premature. La douăzeci și trei de ani, fragilul Blaise intră sub influența fundamentalistă a janseniștilor, iar la treizeci și unu va fi definitiv pierdut pentru știință.

În 23 noiembrie 1654, Blaise Pascal a înnebunit. Stă mărturie *Memorialul* neterminat pe care l-a scris în seara aceea, plin

1. Vezi secțiunea „Omletă matematică”.

de fraze fără nici un sens, dar păstrat cu grijă toată viața și găsit, după moartea lui, cusut într-un buzunar:

Foc. „Dumnezeu al lui Avraam, Dumnezeu al lui Isaac, Dumnezeu al lui Iacob“, nu al filozofilor și savanților. Certitudine. Certitudine. Sentiment. Bucurie. Pace. Dumnezeu al lui Isus Cristos. *Deum meum et Deum vestrum*. „Dumnezeul tău va fi Dumnezeul meu.“ Uitare a lumii și a toate cele în afară de Dumnezeu. N-o găsim decât pe căile despre care ne învață Evangheliile. Măreție a sufletului omenesc [...].

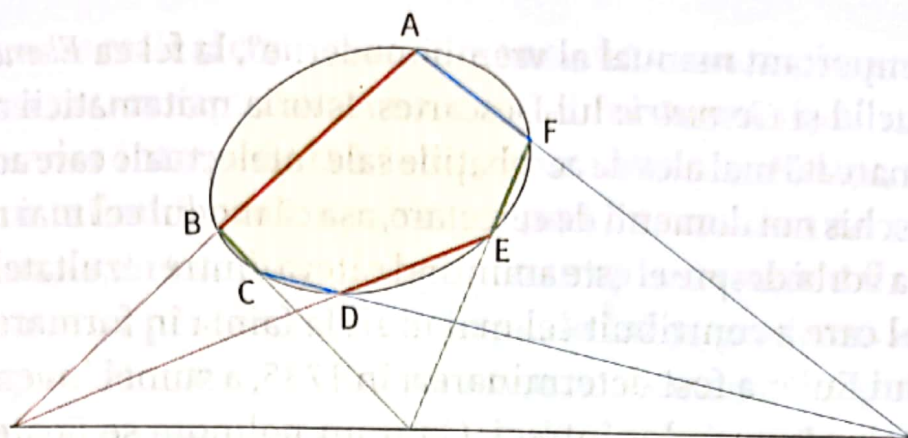
Religia și misticismul erau însă numai efecte ale transformării sale: suferise un accident de trăsură grav pe podul Neuilly, în care își spărsese la modul cel mai propriu capul, suferind apoi toată viața de hemicranii puternice. Când a murit, în 1662, la doar treizeci și nouă de ani, autopsia a scos la lumină leziuni cerebrale evidente.

În orice caz, după 1654 Pascal s-a retras la abația Port Royal ca „solitar“ – sora lui era deja acolo. Azi e amintit mai ales pentru neclarele sale *Cugetări* în care și-a risipit talentul, dar în tinerețe arătase de ce putea fi în stare dacă n-ar fi intervenit convertirea.

În particular, în 1639, la doar șaisprezece ani, fusese entuziasmat de studiul lui Desargues. Și imediat scrisese un *Studiu despre conice*, în care e enunțată o minunată teoremă proiectivă: *dacă un hexagon e înscris într-o conică, atunci cele trei intersecții ale laturilor opuse sunt coliniare*. Demonstrația originală a lui Pascal s-a pierdut, la fel ca și voluminosul său *Tratat despre conice*, scris ulterior, anticipat doar de pomenitul *Studiu*.

Există azi multe demonstrații ale teoremei. Cea mai elegantă e poate aceea care folosește elegantul *Calcul geometric* dezvoltat de Peano în 1888 și constă pur și simplu în interpretarea în două feluri diferite a ecuației:

$$(AB \cdot DE)(AF \cdot CD)(EF \cdot BC) = 0$$



Pe de o parte, hexagonul cu vârfurile A, B, C, D, E, F e înscris într-o conică, pentru că ecuația e pătratică: într-adevăr, fiecare punct apare de exact două ori. Pe de altă parte, cele trei puncte obținute intersectând prelungirile laturilor opuse (adică termenii din paranteze) sunt coliniare pentru că produsul lor e nul.

Drept corolar, simetria egalității din ecuația precedentă arată că e adevărată nu doar teorema lui Pascal, ci și reciproca ei. A fost publicată pentru prima oară în 1733 de William Braikenridge în *Exercițiu de geometrie*, dar fusese observată independent, în aceeași perioadă, de Colin MacLaurin, simultaneitate care a provocat dispute furioase și inutile de prioritate – fața jalnică și reacționară a glorioaselor revoluții matematice.

UN ORB VIZIONAR

Euler

Leonhard Euler a fost cel mai mare matematician al secolului XVIII și unul dintre cei mai mari patru sau cinci din întreaga istorie, asemenea lui Arhimede, Newton, Gauss și un modern la alegere între Poincaré, Hilbert și Von Neumann.

Nenumăratele sale opere se întind de la *Scrisori către o prințesă germană* (1768–1772), minunată și încă neegalată carte de popularizare științifică, până la *Introducere în analiza infinitezimală* (1784), pe care istoricul Carl Boyer o definește drept „cel

mai important manual al vremii moderne", la fel ca *Elementele* lui Euclid și *Geometria* lui Descartes. Istoria matematicii a fost însă marcată mai ales de acrobațiile sale intelectuale care adesea au deschis noi domenii de cercetare, așa că modul cel mai nimerit de a vorbi despre el este amintind câteva dintre rezultatele lui.

Cel care a contribuit cel mai mult la faima în formare a tânărului Euler a fost determinarea, în 1735, a sumei inverselor pătratelor numerelor întregi. Cum un polinom se poate descompune în produsul termenilor obținuți scăzând din necunoscută rădăcinile sale, Euler și-a imaginat că se poate face același lucru și cu sumele infinite. Și-a aplicat ideea sumei de puteri a sinusului, transformând-o în produsul infinit al produselor obținute scăzând din necunoscută „rădăcinile” seriei, adică multiplii întregi ai lui π , în care se anulează sinusul. Înmulțind factorii produsului infinit, se reobține o sumă infinită.

Egalând coeficientul termenului de gradul al doilea al acestei sume infinite cu acela din seria de plecare, Euler a găsit suma inverselor pătratelor întregilor ca fiind $\pi^2/6$. Mai general, egalând coeficienții termenilor de grad par, a obținut suma inverselor oricărei puteri pare a numerelor întregi în funcție de puterea corespunzătoare a lui π și de așa-numitele *numere Bernoulli*: de exemplu, suma inverselor puterilor a patra ale numerelor întregi este $\pi^4/90$, a puterilor a șasea este $\pi^6/945$ etc.

În 1737, Euler și-a mai aplicat o dată artifiiciul, dând o nouă demonstrație pentru infinitatea numerelor prime, demonstrată deja, cu altă metodă, de Euclid în *Elemente*. De data asta a folosit un produs infinit corespunzător sumei inverselor numerelor întregi: continuarea analitică a acestui produs, extinsă la puteri arbitrare ale întregilor, a devenit apoi celebra funcție Zeta. La ea anume se referă cea mai cunoscută problemă deschisă din matematică, așa-numita *ipoteză a lui Riemann*, care fixează la $1/2$ partea reală a zerourilor funcției Zeta, altele decât cele determinate de Euler.

În 1729, Euler introdusese și la fel de celebra funcție Gamma, de data asta încercând să extindă factorialele numerelor întregi

la numere reale și complexe. Ideea era din nou simplă și consta în observarea faptului că factorialul lui n (produsul finit al numerelor întregi de la 1 la n) poate fi descris, de fapt, ca un produs infinit înmulțind și împărțind întâi pe 1 cu $n + 1$, apoi pe 2 cu $n + 2$ etc. Avantajul e că, în timp ce produsul finit are sens numai pentru valori întregi ale lui n , produsul infinit corespunzător are sens pentru orice numere și definește chiar funcția Gamma: ceea ce permite, de exemplu, calculul unor factoriale exotice, cum ar fi al lui $1/2$, care rezultă a fi $\pi^{1/2}/2$.

Formula cea mai cunoscută de care se leagă numele lui Euler, considerată chiar cea mai frumoasă din matematică, este celebra $e^{i\pi} + 1 = 0$, care stabilește o legătură misterioasă între cele mai importante constante din matematică: cele două numere întregi 0 și 1, cele două numere reale e și π , și numărul complex i . Euler a obținut-o în 1748 ca un caz particular al formulei $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, care leagă, mai general, exponențiala imaginară de funcțiile trigonometrice.

O căutare în rețea arată cât de multe și diferite sunt conceptele matematice cu care e asociat numele lui Euler: nu doar teoreme și conjecturi, ci și formule, reguli, identități, ecuații, inegalități, polinoame, integrale, transformări, constante, parametri, caracteristici, numere, puncte, drepte, unghiuri, triunghiuri, drumuri și așa mai departe, mărturie a vederii de vultur matematic care și-a pierdut vederea fizică puțin după treizeci de ani.

ÎNDOIELI ȘI CERTITUDINI

Hilbert

În 1872, într-un articol intitulat „Asupra limitelor științei naturii”, fiziologul german Emil du Bois-Reymond a formulat ceea ce, după el, putea sau trebuia să fie mottoul științei, ținând seama că ea se află adesea în fața unor întrebări nu doar

fără răspuns, ci cărora nu li se poate răspunde: *ignoramus et ignorabimus*, „nu știm și nu vom ști“. Sau, în traducere un pic mai liberă, „nu putem spera ca toate îndoielile noastre să se transforme într-o bună zi în certitudini“.

În 1880, într-o conferință susținută în fața Academiei Prusace de științe din Berlin, du Bois-Reymond a dat câteva exemple de probleme pe care le considera insolubile, cu accent pe o listă de „șapte probleme cosmice“: natura ultimă a materiei și a forței, originea mișcării, originea vieții, aparenta teleologie a naturii, originea senzațiilor, originea gândirii inteligente și chestiunea liberului arbitru.

Mottoul *ignoramus et ignorabimus* a devenit popular, și nu doar în Germania, iar încercarea cea mai cunoscută de a-l respinge îi aparține lui David Hilbert, în ziua de 8 septembrie 1930, la Königsberg. Cu ocazia pensionării, orașul în care se născuse și copilărise i-a conferit cetățenia onorifică, el pronunțând atunci celebrul discurs despre „Cunoașterea naturii și logica“, din care a citit un scurt fragment și la radioul german. Discursul se încheia astfel:

Vrând să menționeze o problemă insolubilă, filozoful Comte a spus odată că știința nu va ajunge niciodată să cunoască compoziția chimică a corpurilor cerești, însă câțiva ani mai târziu problema a fost rezolvată folosind analiza spectrală a lui Bunsen și Kirchhoff. Adevăratul motiv pentru care Comte nu a reușit să găsească o problemă insolubilă este, după părerea mea, faptul că nu există nici o problemă insolubilă. În loc de smintitul *ignorabimus*, mottoul nostru este *wir müssen wissen, wir werden wissen* [trebuie să știm și vom ști].

Cuvintele finale au fost săpate pe piatra funerară a lui Hilbert, din Göttingen, dar, în mod paradoxal, fuseseră pronunțate în același loc și la doar o zi după ce Kurt Gödel anunțase lumii celebra sa teoremă de incompletitudine: în orice sistem formal

al matematicii care conține un minimum de aritmetică, există propoziții indecidabile, care nu pot fi nici demonstrate, nici negate.

Prima impresie e deci că Gödel a confirmat mottoul lui du Bois-Reymond și l-a respins pe cel al lui Hilbert – dar să nu ne grăbim. Într-adevăr, propozițiile indecidabile sunt astfel în interiorul unei anumite formalizări a matematicii, dar pot deveni decidabile în alte formalizări. Ce demonstrează teorema de incompletitudine este că nu poate exista o formalizare completă a matematicii, dar asta nu înseamnă că există probleme insolubile la modul absolut. Dimpotrivă, Gödel chiar credea că nu există: așadar, mottoul de pe mormântul lui Hilbert n-ar fi stat rău nici pe al său.

De altfel, același Hilbert observase într-un alt discurs celebru, despre „Probleme mathématiques”, ținut încă în 1900 la Congresul Internațional de la Paris:

Cu siguranță, fiecare matematician împărtășește convingerea că pentru orice problemă matematică specifică există o soluție, fie sub forma unui răspuns la întrebarea ridicată de problemă, fie demonstrând că e imposibil să se dea un răspuns.

Și continua, întrebându-se:

Această axiomă a rezolvabilității oricărei probleme e o particularitate tipică gândirii matematice, ori e poate o lege generală, inerentă naturii intime a intelectului nostru, aceea datorită căreia el e în stare să răspundă tuturor întrebărilor pe care și le pune? Într-adevăr, în toate științele apar vechi probleme care au fost rezolvate în mod satisfăcător și util cu demonstrații de imposibilitate.

Exemple clasice de asemenea probleme în matematică sunt iraționalitatea rădăcinii pătrate a lui 2 (Pitagora), independența axiomei paralelelor (Gauss, Lobachevski, Bolyai), imposibilitatea

cuadraturii cercului cu rigla și compasul (Lindemann), nerezolvabilitatea ecuației generale de gradul al cincilea prin radicali (Abel și Ruffini). Așa că Hilbert avea motivele lui ca să respingă motto-ul lui du Bois-Reymond, fără să-l citeze, de altfel, explicit:

Convingerea aceasta despre rezolvabilitatea oricărei probleme e pentru noi un stimul în muncă. Auzim întruna înlăuntrul nostru chemarea: „Iată problema, găsește-i soluția! O poți găsi prin puterea minții, pentru că în matematică nu există *ignorabimus*.“

FASCINAȚIA ANALOGIEI

Weil

Într-o scrisoare din 26 martie 1940¹, celebrul matematician André Weil încerca să-i povestească surorii sale, la fel de celebra filozoafă Simone Weil, câte ceva despre munca lui, punând-o însă în gardă: „Poate că vei înțelege la început, dar mai apoi n-o să înțelegi nimic.“ Vorbea, într-adevăr, despre chestiuni tehnice, dar a reușit să-i comunice în cuvinte simple măcar un gând central: rolul analogiei în descoperirea matematică, datorită căreia lucruri diferite la nivel concret pot fi văzute ca manifestări ale unui același lucru la nivel abstract.

În comunicarea „De la matematică la metafizică“, ținută la un congres din 1960, Weil relua ideea:

Așa cum știu toți matematicienii, nimic nu e mai fecund decât aceste analogii obscure, aceste reflectări neclare ale unei teorii în alta, aceste certitudini ascunse, aceste neguri de nepătruns și nimic nu produce învățatului mai multă plăcere. Și-apoi, într-o zi, părelnicia încetează, presentimentul devine certitudine, teoriile gemene își dezvăluie originea

1. În *Oeuvres Scientifiques, Collected Papers*, vol. 1, Springer, New York, 1979.

comună înainte să dispară. Așa cum ne învață *Bhagavad Gita*, ajungem simultan la cunoaștere și indiferență. Metafizica a devenit matematică, gata să formeze materia unui tratat a cărui frumusețe rece nu ne va mai putea emoționa.

Surorii lui îi explica utilitatea acestei metode în cuvintele următoare:

Matematica modernă a ajuns la o întindere și o complexitate care fac să devină urgentă, dacă vrem ca matematica să continue să existe și să nu se dizolve într-o grămadă de mici domenii de cercetare, ducerea la bun sfârșit a unei enorme munci de unificare, astfel ca întregul substrat comun al diferitelor ramuri ale științei să fie absorbit în câteva teorii simple și generale, să fie suprimate lucrurile inutile și să fie lăsat intact ceea ce constituie efectiv aspectul specific al fiecărei mari probleme.

Rândurile acestea rezumă programul de lucru pe care André Weil îl inițiasse chiar în anii aceia, împreună cu alți membri ai misteriosului grup clandestin Bourbaki, pentru reșezarea matematicii pe baza conceptului de „structură”. „Teoriile simple și generale” pe care le avea în minte erau deci cele ansamblate, algebrice, topologice și analitice descrise ulterior în numeroasele volume de *Elemente de matematică* ale grupului, publicate cu începere din 1939.

Scriindu-i surorii sale în timpul celui de-Al Doilea Război Mondial, lui Weil i-a venit spontan în minte o analogie militară:

În toate acestea există mari probleme de strategie. Și pe cât de adesea e cunoscută tactica, pe atât de rar e înțeleasă strategia. Aș compara deci, în ciuda incoerenței metaforelor, aceste mari edificii axiomatice cu comunicațiile din spatele frontului: niciodată nu s-a obținut multă glorie în birourile administrației, nici în convoaiele cu echipamente, dar ce-ar fi dacă n-ar exista acei mulți oameni serioși care

se dedică acestor însărcinări subalterne? Riscul ar fi ca diferite fronturi să nu mai știe unele de altele, ca evreii în deșert, sau să se piardă timp, ca Hannibal la Capua.

Firește, fronturile deschise de matematică se desfășoară nu doar în spațiu, ci și în timp. Iar punctul de vedere privilegiat pentru a observa devenirea analogiilor care, în decursul timpului, devin teoreme și teorii, e chiar istoria matematicii. O întreprindere în care André Weil, după cum povestește fiica sa Sylvie Weil¹, „se hotărâse să se recicleze în ultimele decenii de viață, în loc să se lase pradă depresiei, asemenea unora dintre bătrânii săi colegi care se încăpățâneau să facă matematică cu un creier ajuns mult mai puțin ductil“. În cazul lui, rezultatul a fost marea *Teoria numerelor*², care acoperă perioada dintre secolul XVII al lui Fermat până la secolul XIX al lui Legendre și e considerată o capodoperă nemuritoare.

Spiritul care animă cartea fusese deja anticipat de André Weil într-o altă scrisoare adresată surorii lui pe 29 februarie 1940:

Matematica nu e altceva decât o artă, un fel de sculptură într-un material extrem de dur și rezistent, ca unele porfire pe care le folosesc uneori sculptorii. Matematicianul e atât de supus capriciilor fibrei, curburii și imperfecțiunilor materiei în care lucrează, încât asta conferă operei sale o formă de obiectivitate. Se produce astfel o operă de artă, dar în timp ce critica de artă e un domeniu van și vid, istoria sa poate că e posibilă. Din câte știu eu însă, nu s-a făcut niciodată astfel istoria matematicii.

Până la cartea sa, care exemplifică pe cât de bine posibil un anumit mod de a povesti istoria matematicii, refuzând scurtăturile bârfei sau anecdotelor despre protagoniști și urmând, în schimb, calea regală a reconstruirii parcursului lor intelectual.

1. *Chez les Weil*, Buchet-Chastel, 2009.

2. *Basic Number Theory*, Springer Verlag, 1974.

Cédric Villani e unul dintre cei mai străluciți matematicieni în viață și, cu siguranță, una dintre cele mai surprinzătoare apariții. Cine-l vede îl remarcă și nu-l mai uită, pentru că seamănă cu un nobil ieșit dintr-un roman al lui Jane Austen; nu doar din pricina aspectului fizic și a părului lins, lăsat lung, ci și datorită vestimentației sale foarte particulare, constând în haină de costum (adesea trei sferturi) și vestă, o cravată Laval-lière sau Ascot colorată și o foarte vizibilă broșă în formă de păianjen.

Ce e-n capul lui, sub plete și deasupra cravatei, e greu de imaginat. Iar cartea lui de popularizare, *Teorema vie**, explică doar parțial lucrurile, pentru că pune accentul mai degrabă pe aspectele anecdotice și folcloristice ale vieții sale, nu pe rezultatele științifice rodite de mintea sa. Rezultate care i-au adus în 2010 Medalia Fields, cu motivația: „Pentru demonstrația sa a amortizării neliniare a lui Landau și a convergenței către echilibru a ecuației lui Boltzmann.”

Păcat, pentru că ambele subiecte meritau aprofundate. Să încercăm să remediem, cel puțin parțial, căutând să explicăm motivele pentru care a primit Villani laurii matematicii. Uitându-ne la producția științifică, observăm că subiectul său predilect e transportul optimal, despre care a publicat două cărți cu un total de o mie de pagini.¹

Disciplina aceasta a fost fondată de Gaspard Monge, în *Memoriu asupra teoriei debleurilor și rambleurilor* (1781), și studiază problema deplasării unui corp dintr-un punct în altul cu cheltuială minimă de lucru mecanic. În articolul *Despre translocarea*

* Humanitas, București, 2014 (n. tr.).

1. *Topics in Optimal Transportation*, Amer. Math. Soc., 2003; *Optimal Transport. Old and new*, Springer, 2009.

maselor (1942), Leonid Kantorovici a aplicat nou-născuta teorie a programării liniare pentru rezolvarea problemei, ceea ce i-a adus ulterior, în 1975, Premiul Nobel pentru economie. Contribuția lui Villani privește, în schimb, soluția problemei în geometrie neeuclidiană, iar descoperirea sa e că se poate calcula curbura spațiului în care ne deplasăm, folosind variațiile entropiei.

Legătura dintre geometrie și termodinamică trece prin *ecuația căldurii*, descoperită de Joseph Louis Fourier în *Teoria analitică a căldurii* (1822), care determină felul în care se propagă temperatura într-un corp solid: este, de fapt, o formă de transport optimal, în care temperatura e transferată dintr-un loc în altul al corpului cu cheltuială minimă de energie cinetică. Ceva asemănător se întâmplă cu mai generala *ecuație a transportului*, descoperită de Ludwig Boltzmann în *Studii asupra echilibrului termic al moleculelor de gaz* (1872), care stabilește cum se propagă temperatura într-un fluid sau într-un gaz.

Încă de la formularea teoriei căldurii, Fourier își dăduse seama că propagarea temperaturii într-un corp omogen e regulată. Că la fel stau lucrurile într-un corp neomogen e un rezultat mult mai dificil și complicat, obținut de John Nash în 1958¹, și tot de el extins la toate ecuațiile diferențiale de același tip cu ecuația căldurii. Acesta a fost unul dintre primele exemple dintr-o serie de demonstrații obținute cu ajutorul analizei fluxului unor cantități analoage căldurii, care au dus la rezultate surprinzătoare în domeniile cele mai diferite.²

Una dintre lucrările citate în motivația juriului pentru acordarea Medaliei Fields lui Villani este „Asupra tendinței către echilibru global a sistemelor cinetice neomogene în spațiu” (2005), scrisă împreună cu Laurent Desvillettes. Aici, cei doi autori demonstrează că nu doar soluțiile ecuației lui Fourier sunt regulate, ci și soluțiile ecuației lui Boltzmann. Ceea ce

1. Vezi secțiunile „Un joc de autor” și „Rămas-bun unei minți strălucite”.

2. Vezi secțiunea „Un rezultat care prinde”.

extinde rezultatul lui Nash, pentru că ecuația lui Fourier poate fi considerată un caz particular al ecuației lui Boltzmann: mai precis, o versiune a sa în anumite regimuri particulare.

Celălalt articol citat e *Despre amortizarea Landau* (2009), publicat de Villani în colaborare cu Clément Mouhot după o saga de doi ani povestită în cartea de la care am pornit. De data asta e vorba despre comportamentul undelor de densitate a electronilor în medii conductoare, cum sunt plasma ori metalele, descoperite în anii douăzeci de Irving Langmuir, Premiul Nobel pentru chimie în 1932. În articolul *Despre vibrațiile plasmei electronice* (1946), Lev Landau, Premiul Nobel pentru fizică în 1962, a arătat că, dacă teoria e simplificată prin liniarizare, aceste unde se amortizează foarte rapid, anume exponențial. Villani și Mouhot au demonstrat acest rezultat în cazul general, fără liniarizare.

După cum se vede, fizica nu încetează să ofere matematicii moderne inspirație și stimuli. Ca și Villani, de altfel, după cum va putea constata oricine are norocul să-i urmărească vreuna dintre vulcanicele și pitoreștile sale conferințe.

MOARTEA UNUI MATEMATICIAN AMERICAN

Thurston

William Thurston, unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului XX, a murit pe 21 august 2012, la șaizeci și cinci de ani, devorat de un cancer al creierului. În ceva mai mult de un an, răul întunecat a stins cea mai strălucitoare minte geometrică a zilelor noastre, după ce i-a devastat fizicul (o operație disperată îi extirpase practic jumătate din față și un ochi, făcându-l aproape de nerecunoscut).

Îl mai văzusem în semestrul dinainte, mergând suferind și desfigurat pe culoarele de la Cornell University, unde predă. Cu totul altă imagine față de cea a bărbatului zâmbitor și elegant

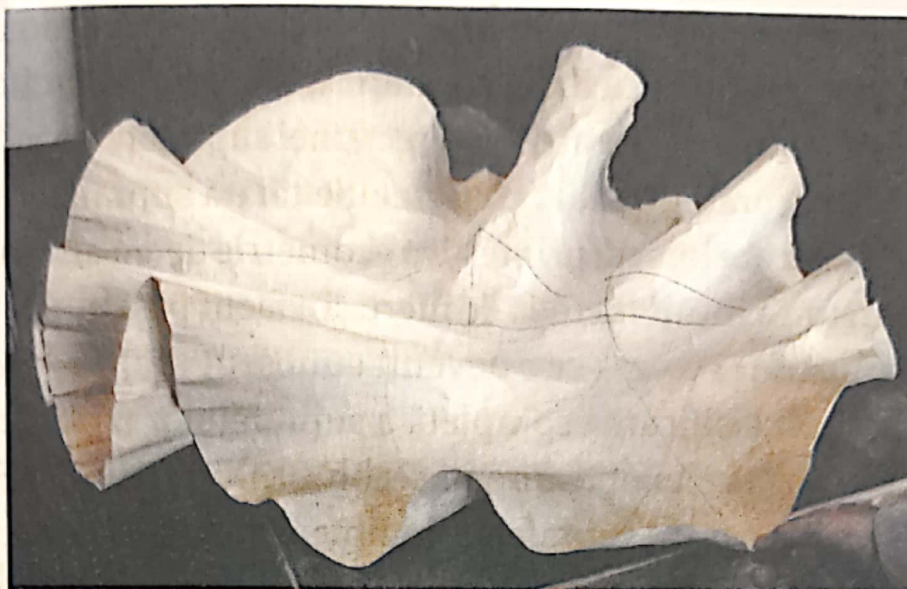


Modele de la parada lui Miyake și Thurston din 2010

care cu numai doi ani înainte, în 2010, la Paris, fusese invitatul de onoare al unei parade a modei. Într-adevăr, stilistul Issey Miyake se inspirase din geometria lui Thurston pentru imprimurile sale și în seara aceea matematicianul a urcat pe *runway* alături de modelele profesioniste, purtând o haină somptuoasă.

Așa cum se poate lesne intui, Thurston nu disprețuia popularizarea, aceasta fiind de douăzeci de ani una dintre temele multiplelor sale activități. De exemplu, îngrijind secțiunea de matematică a periodicului dedicat tinerilor *Quantum Magazine*. Conducând *Geometry Centrum* de la Minnesota University, specializat în dezvoltarea sistemelor de vizualizare grafică a obiectelor geometrice. Și deschizând, în calitate de director, prestigiosul Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) de la Berkeley unei serii de inițiative de popularizare în rândul marelui public.

Evident însă că adevărata sa moștenire e prodigioasa producție matematică, rod al unei formidabile intuiții geometrice



care-i permitea să vadă cu ochii minții ceea ce nu se poate vedea cu ochii trupului. Ideile sale mature, adunate în 1997 în cartea *Geometrie trei-dimensională și topologie*¹, au deschis drumurile viitorului și i-au adus Medalia Fields în 1982.

Thurston și-a dovedit talentul foarte timpuriu. Încă student, în anii șaizeci, redescoperise de unul singur un model al geometriei hiperbolice obținut prin lipirea unor fâșii de hârtie, toate curbate în același mod. Model descoperit de fapt în 1869 de Eugenio Beltrami și comparat, într-un ziar din epocă, cu *scufia bunicii*, niciodată însă publicat, iar apoi complet uitat.

În 2010, după ce dădusem întâmplător peste fotografii ale modelului Beltrami păstrat la Universitatea din Pavia, i le-am trimis lui Thurston, care încă nu era bolnav. Iar el a fost plăcut surprins să vadă legătura, la distanță de un secol, dintre ideile sale de tinerețe și cele ale unuia dintre părinții geometriei hiperbolice.

Dar realizarea pentru care Thurston a intrat în istorie e studiul topologic al suprafețelor tridimensionale în spațiul cu patru dimensiuni. El este cel care a descoperit că, față de cazul suprafețelor bidimensionale în spațiul cu trei dimensiuni,

1. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, 1997.

lucrurile se complică enorm. În primul rând, există nu doar trei geometrii posibile (euclidiană, sferică, hiperbolică), ci chiar opt. În plus, nu se poate atribui direct unei suprafețe una dintre aceste opt geometrii: mai întâi, trebuie tăiată suprafața în bucăți, apoi fiecare bucată primește o geometrie de un anumit tip.

Thurston a intuit metoda de lucru și a făcut pași importanți în demonstrarea a ceea ce a devenit cunoscut drept *conjectura lui Thurston*: clasificarea completă a suprafețelor tridimensionale, analoaga celei obținute în secolul XIX de August Ferdinand Möbius pentru suprafețele bidimensionale. În particular, în 1982 a demonstrat o *teoremă de hiperbolicizare*, atât de complicată, încât i se spune „monstruoasă”, și care demonstrează că geometria hiperbolică are un rol central și în acest caz.

Demonstrația completă a conjecturii lui Thurston a fost dată în 2003 de Grigori Perelman¹, care a primit pentru asta Medalia Fields în 2006, iar în 2010 un milion de dolari pentru că a rezolvat *en passant* una dintre cele șapte „probleme ale mileniului”: celebra *conjectură a lui Poincaré*, care e doar un caz particular al foarte generalei clasificări a lui Thurston, încă o dovadă a fecundității intuițiilor lui.

CEL MAI BUN FILOZOF-MATEMATICIAN

Kreisel

Pe 1 martie 2015 a murit la Salzburg Georg Kreisel, „cel mai bun filozof și matematician”. Chiar dacă judecata poate părea apodictică, nu se poate trece ușor peste ea: îi aparține lui Ludwig Wittgenstein și a fost rostită în îndepărtatul an 1944², când Kreisel nu avea decât douăzeci și unu de ani!

1. Vezi secțiunea „Un rezultat care prinde”.

2. Vezi Ray Monk, *Wittgenstein. Il dovere del genio*, Bompiani, 1991, pp. 490–491.

Deși austriac, Kreisel emigrase în Anglia din pricina originilor sale evreiești, iar în timpul războiului a lucrat la Amiralitate. În perioada aceea, împărțea camera cu un coleg care a devenit mai târziu unul dintre puținii prieteni păstrați întreaga viață: se numea Francis Crick, iar în 1962 avea să primească Premiul Nobel pentru descoperirea structurii ADN-ului. Kreisel apare de două ori în cartea *The Double Helix* (1968), de James Watson*, care-l descrie ca fiind cel căruia i se adresa Crick de câte ori se găsea în dificultate cu matematica, și ca un om care nu suporta *small talk*.

Nu e deci întâmplător că a căutat și, evident, a găsit compania celor „bogați și celebri“, inclusiv miliardari ca familia Agnelli, ori actrițe ca Brigitte Bardot. Și nu e de mirare că a alimentat, activ sau pasiv, nenumărate *gossips* printre matematicieni, avizi să frecventeze medii complet diferite de al lor, ori să nu frecventeze nici unul.

Încă din vremea studenției la Cambridge, tânărul „filozof și matematician“ a devenit confidentul lui Wittgenstein care, în timpul plimbărilor împreună, testa pe el teoriile publicate apoi în *Zettel* (1967) și în alte cărți postume. În acea perioadă, Kreisel a fost prieten și cu alt *enfant terrible*, Freeman Dyson, căruia, până la urmă, i-a furat soția, prezentând-o ulterior, prea puțin elegant, drept „soția mea, doamna Dyson“. Tot la Cambridge a cunoscut-o bine pe scriitoarea Iris Murdoch, care l-a luat drept model pentru personajul din *O înfrângere aproape onorabilă*¹, dedicându-i apoi *Un om întâmplător*².

În cei doi ani petrecuți la Paris, la începutul anilor șaiszeci, Kreisel l-a frecventat pe Raymond Queneau³, pe care l-a citat ca „editor“ în prefața cărții *Elemente de logică matematică* (1966), scrisă împreună cu Jean-Louis Krivine. Lucru deloc surprinzător, ținând seama

* *Elicea vieții*, Editura Științifică, București, 1970 (n. tr.).

1. *A fairly Honourable Defeat*, Chatto & Windus, 1970.

2. *An accidental man*, Chatto & Windus, 1971.

3. Vezi secțiunea „Fundamentele literaturii“.

că grupul OuLiPo, fondat de Queneau însuși, își propunea tocmai să înlesnească colaborarea dintre literați și matematicieni, chiar dacă, de obicei, colaborarea pornea din direcția opusă celei folosite de Kreisel.

Când a debarcat în Statele Unite, a devenit profesor la Stanford, dar era și un obișnuit al Institutului pentru Studii Avansate de la Princeton, unde, de data asta, a devenit confidentul lui Gödel. Erau amândoi austrieci de origine și firi închise, iar Kreisel și-a asumat onoarea și povara rolului de „mesager” între muritorii de rând și divinitatea logică a secolului XX. Iar necrologul lui Gödel pe care l-a scris pentru Royal Society, ai cărei membri erau amândoi, rămâne o capodoperă de prezentare a rezultatelor celui din urmă.¹

Dincolo însă de bârfele iscate de relațiile sale neobișnuite și de mitologia alimentată de prietenia și conversațiile cu Wittgenstein și Gödel, Kreisel a avut o mare influență asupra logicii matematice. Chiar dacă îi plăcea să fie și să rămână obscur, cu scuza că „claritatea e lipsă de concentrare”, frază pe care un logician celebru, enervat de veșnicele lui provocări, l-a sfătuit să și-o păstreze pentru epitaf.

Că e totuși și ceva adevărat în enunțul acesta a demonstrat chiar Kreisel, cu al său *unwinding program*, „program de desfășurare”, care consta în a lua demonstrații clasice, deci aparent „clare”, și a extrage din ele informații constructive ascunse. Dar ca să-l duci la capăt, era nevoie să-ți bagi mâinile adânc în matematica grea și puțini au reușit să depășească ceea ce el însuși a făcut analizând, de exemplu, soluția lui Artin la problema a șaptesprezecea a lui Hilbert.

La un nivel mai elementar, la prima vedere, demonstrația lui Euclid pentru existența unei infinități de numere prime e directă și constructivă: dat un număr finit de numere prime,

1. Kurt Gödel, *Bibliographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, 1980.

furnizează explicit o limită pentru următorul. În schimb, demonstrația lui Euler e indirectă și clasică, bazându-se pe aparenta irelevanță (pentru această problemă) a seriei armonice.¹ Și totuși aceasta, „desfășurată” cum se cuvine, furnizează limite mai bune și mai eficiente decât prima. Încă o dovadă a faptului că, așa cum ne-a învățat Kreisel, dacă nu ne mulțumim cu ceea ce ne place *a priori*, atunci putem găsi, *a posteriori*, ceva care să ne placă mai mult.

RĂMAS-BUN UNEI MINȚI STRĂLUCITE

Nash

Pe 23 mai 2015, tragica moarte a lui John Forbes Nash a readus în atenția publică figura acestui geniu matematic, devenită populară în 2001 prin filmul *O minte strălucită*, un film cu prea puțină legătură cu realitatea.² Pe specialiști însă nu-i interesează atât foarte particularele încercări ale vieții sale – de la boala psihică din tinerețe la remisiunea ei spontană, survenită la bătrânețe, până la accidentul rutier care a pus capăt vieții lui –, cât extraordinarele rezultate pe care le-a obținut în doar zece ani din tinerețea sa, între douăzeci și treizeci de ani.

Cele mai cunoscute sunt acelea din teza sa de doctorat, despre *Jocuri necooperative*, pentru care a primit în 1994 Premiul Nobel pentru economie, împreună cu John Harsanyi și Reinhard Selten, cu motivația: „Pentru analiza lor de pionierat a echilibrelor în teoria jocurilor necooperative.” Se face aici referire la așa-numitele *echilibre Nash*, constând într-un comportament care nu se poate îmbunătăți prin acțiuni unilaterale, în sensul că s-ar fi menținut chiar dacă se știa dinainte ce comportament va adopta adversarul.

1. Vezi secțiunea „Un orb vizionar”.

2. Vezi secțiunea „La cinema”.

În jocurile simetrice, în care jucătorii au aceleași câștiguri și aceleași pierderi când se află în aceleași condiții, echilibrele Nash există întotdeauna. Dar pot să nu fie nici unice, nici simetrice: așa cum se întâmplă, de pildă, în cursa înarmărilor. Însă chiar și când sunt unice și simetrice, echilibrele pot să nu fie dezirabile: cum se întâmplă în celebra *dilemă a prizonierului*. Ceea ce arată că echilibrul Nash e o condiție necesară pentru un comportament rațional, dar nu suficientă.

În schimb, în jocurile nesimetrice, precedentele *echilibre pure* pot și să nu existe: cum se întâmplă când jucăm par-impair. Teorema fundamentală a teoriei jocurilor demonstrată de Nash arată însă că există totuși întotdeauna un *echilibru mixt*, la care un jucător contribuie cu o probabilitate p , iar celălalt cu o probabilitate q . Echilibrele pure corespund cazurilor extreme, când p și q iau valorile 0 și 1.

Nash a murit pe drumul de întoarcere de la Oslo, unde cu o săptămână în urmă primise Premiul Abel pentru matematică, împreună cu Louis Nirenberg, „pentru surprinzătoare și prolifice contribuții la teoria ecuațiilor neliniare cu derivate parțiale”. În cazul său, era vorba despre *problema a nouăsprezecea a lui Hilbert*, de pe celebra listă de douăzeci și trei propuse de David Hilbert la Congresul Internațional al Matematicienilor de la Paris, din 1900.

Problema se referea la ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale de tip eliptic, pentru care exemplul tipic e celebra ecuație a căldurii. În 1811, Joseph Fourier demonstrase că propagarea căldurii într-un corp omogen are loc în manieră regulată, iar în 1958, Nash a extins acest rezultat la cazul mult mai complicat al corpurilor neomogene. Același rezultat a fost obținut și de Ennio de Giorgi, în aceeași perioadă, dar cu alte metode, și se presupune că acesta a fost motivul pentru care nici unul nu a primit Medalia Fields.

Nash a abordat problema regularității soluțiilor pentru ecuații eliptice, legând-o de problema analoagă pentru ecuații

parabolice, folosind în demonstrație ceea ce azi numim *inegalitățile lui Nash* și rezolvând simultan ambele probleme. În 2005, Cédric Villani a extins rezultatul lui Nash pentru ecuația lui Fourier la ecuația lui Boltzmann, ceea ce i-a adus Medalia Fields în 2010.¹ Nu e deci întâmplător că, pe pagina sa web, i-a pus și pe Boltzmann, și pe Nash printre eroii săi, alături de Maxwell și Turing, spunând că „are o extremă admirație pentru ce a făcut Nash în acest domeniu“.

Apropo de Medalia Fields, se pare că Nash a pierdut-o pe cea din 1958 la un singur vot, în favoarea lui René Thom. Atunci intrase în arenă cu un alt articol, despre *Varietăți algebrice reale* (1952), care era o „teză de rezervă“, în caz că nu i-ar fi fost acceptată cea de teoria jocurilor. E vorba despre un rezultat de geometrie care arată că o varietate riemanniană se poate scufunda întotdeauna într-un spațiu euclidian, fără să se modifice lungimea curbilor. Ceea ce confirmă eclectismul lui Nash care, în doar zece ani, a reușit să producă o serie impresionantă de rezultate profunde în domenii dintre cele mai diferite, grație cărora va fi amintit ca unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului XX.

O IRANIANĂ PE PODIUM

Mirzakhani

Maryam Mirzakhani, prima și deocamdată singura femeie care a primit Medalia Fields, a murit de cancer pe 14 iulie 2017, la numai patruzeci de ani. Se născuse pe 3 mai 1977 la Teheran și-și dovedise încă din copilărie înzestrarea excepțională. De exemplu, în timpul școlii generale și al liceului la Farzanegan, o instituție cu filiale pe întreg teritoriul iranian și creată tocmai pentru „dezvoltarea talentelor excepționale“. Și câștigând de

1. Vezi secțiunea „Semn distinctiv: cravata“.

două ori medalia de aur la Olimpiada Internațională de Matematică, în 1994 și 1995, a doua oară cu punctaj maxim, 42/42.

Deși un *enfant prodige* cam încetează să mai fie *prodige* de îndată ce nu mai e *enfant*, intrând, de obicei, cu amărăciune în rândurile adulților, uneori reușește totuși să-și depășească condiția de *Ex-copil-minune* (1953) și să se dezvolte intelectual până la a putea declara *Sunt matematician* (1956), ca în titlurile celor două volume autobiografice ale lui Norbert Wiener.¹ În particular, o duzină de câștigători ai Olimpiadei Internaționale de Matematică au ajuns până la Medalia Fields, lucru reușit și de Mirzakhani în 2014.

Faima și-o câștigase însă cu zece ani înainte, în 2004, cu teza sa de doctorat la Harvard, unde poposise după licența din 1999 de la Teheran, sub îndrumarea lui Curtis McMullen, el însuși medaliat Fields în 1998. Rezultatul care a făcut-o celebră era un calcul în stilul marilor teoreme: de exemplu, cea a lui Jacques Hadamard și Charles de la Vallée Poussin din 1896, anume că distribuția numerelor prime e logaritmică, în sensul că raportul dintre numărul n și numărul de numere prime mai mici ca n tinde spre logaritmul natural al lui n .

Calculare similare s-au făcut și în geometrie. În particular, considerând suprafețe închise, precum sfera sau colacii cu una sau mai multe găuri și curbele de lungime minimă, „geodezicele”, de pe ele: meridianele de pe sferă, de exemplu. În cazul colacilor cu găuri, s-a dovedit că numărul geodezicelor închise crește în manieră exponențială, în sensul că produsul dintre numărul n și numărul de geodezice închise de lungime mai mică decât n tinde la exponențiala naturală a lui n .

Unele dintre geodezicele închise pot trece de mai multe ori printr-un punct, autointersectându-se, iar altele pot să nu se autointersecteze. În teza sa, Mirzakhani a demonstrat că acestea

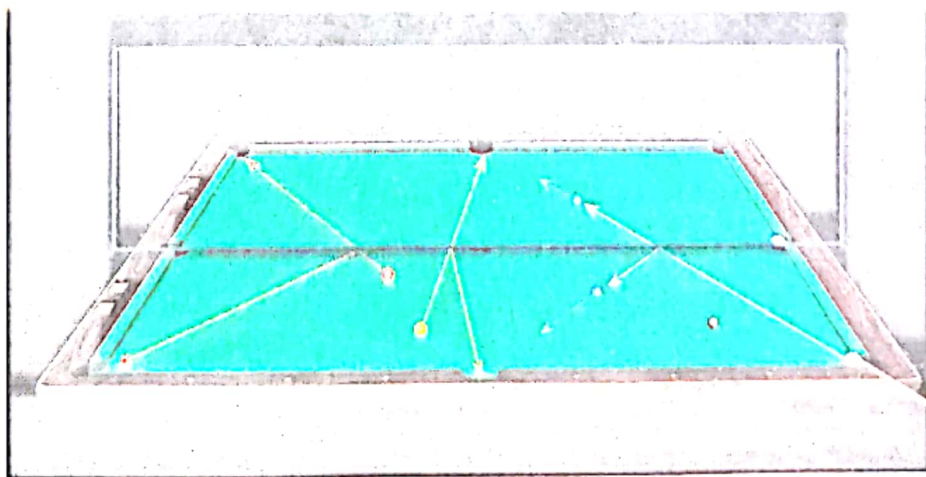
1. *A Life in Cybernetics. Ex-prodigy. My Childhood and Youth și I Am a Mathematician. The Later Life of a Prodigy*, MIT Press, 2018.

din urmă, zise „simple“, sunt relativ puține: într-adevăr, numărul lor nu are creștere exponențială cu lungimea, ci doar polinomială. Iar gradul polinomului în n este legat de numărul de găuri ale colacului într-un mod deja intuit de Riemann: anume, este de șase ori numărul de găuri fără unu.

Una dintre aplicațiile acestui rezultat a fost o nouă demonstrație a unei conjecturi a lui Edward Witten, Medalia Fields în 1990, legată de intersecțiile geodezicelor pe anumite suprafețe particulare considerate de el în teoria corzilor [*string theory*]. O conjectură profundă, cu demonstrație dificilă, a cărei soluție dată de Maxim Kontsevich în 1992 a contribuit la Medalia Fields câștigată și de acesta în 1998.

În 2006, la doi ani după teză, Mirzakhani a început să colaboreze cu Alex Eskin, rezultatul fiind un articol monumental de două sute de pagini, în 2014, despre traiectoriile pe care le urmează bilele de biliard care ricoșează pe mese poligonale cu unghiuri raționale. Poate părea doar o problemă amuzantă – în realitate e un exemplu tipic de sistem dinamic care poate conduce ușor la comportament haotic. Iar întrebarea tipică în legătură cu un asemenea biliard e dacă există traiectorii care să treacă prin toate punctele mesei.

Un mod de a lega această problematică de geometrie constă în a pune oglinzi pe laturile mesei, astfel încât parcursul în zigzag al bilei care ricoșează pe mantele unei singure mese să



se transforme într-un parcurs rectiliniu pe un șir de mese reflectate privite în oglinzi.

Lipind între ele marginile extreme ale meselor din șirul acesta, se obțin suprafețe similare colacilor (toruri), pe care bilele se mișcă urmând geodezicele. Iar o aplicație tipică a acestor studii privește posibilitatea de a lumina fiecare punct al unei camere cu pereții acoperiți de oglinzi, folosind un singur bec plasat în punctul corespunzător.

Cercetări de acest fel exemplifică un motto al lui Maryam Mirzakhani: „Nu trebuie să ne mulțumim să culegem fructele de pe ramurile la îndemână“, pentru că „nu scrie nicăieri că viața trebuie să fie ușoară“. Drept dovadă, și rezultatele ei spectaculoase, și trista ei moarte prematură.

MICUL OM MARE

Atiyah

Lui sir Michael Atiyah îi plăcea să spună povestea numelui său: la naștere, tatăl său îl botezase Michelangelo; când a crescut și s-au lămurit că avea să rămână scund, a fost retrogradat la Michael. Mărimea fizică puțină nu l-a împiedicat însă să ajungă la o enormă statură intelectuală, devenind nu doar unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului XX, dar și unul dintre cei mai titrați englezi.

Cum tatăl era libanez și creștin ortodox, iar mama era scoțiană și anglicană, fiul a devenit poliglot și cosmopolit, neliniat din punct de vedere politic, chiar dacă povestea amuzat numeroasele sale întâlniri cu regina Elisabeta. Mai întâi, între 1990 și 1997, în dubla postură de președinte al Royal Society și de *master* al Trinity College, pe care el îl definea drept „cel mai bun *college* din universitate și din univers“. Apoi, începând din 1992, ca membru al exclusivistului club Ordinul Meritului, care număra numai douăzeci și patru de persoane.

În 2014, a votat pentru secesiunea Scoției de Regatul Unit, pentru că era împotriva armelor nucleare. Rămânea în felul acesta credincios apartenenței la Mișcarea Pugwash a oamenilor de știință pentru dezarmare, fondată de Bertrand Russell și Albert Einstein în 1955, laureată a Premiului Nobel pentru pace în 1995, o mișcare prezidată de însuși Atiyah între 1997 și 2002,

Copilăria și-a petrecut-o în Sudan și Egipt, mergând la școală la Khartoum, Cairo și Alexandria, dar cariera de matematician și-a construit-o în Anglia, întâi la Cambridge, apoi la Oxford, înainte de a se retrage, în 1997, la pensie, la Edinburgh. Să vorbești despre „carieră” e însă reductionist, dat fiind imensul număr de onoruri primite de Atiyah: începând cu cele două cele mai prestigioase, Medalia Fields în 1966 și Premiul Abel în 2004, analoage ale unui Premiu Nobel și unui Oscar pentru întreaga carieră.

Rezultatul cel mai important de care și-a legat Atiyah numele e *teorema de index*, demonstrată împreună cu Isadore Singer, pe care el îl însuși l-a descris astfel: „E vorba despre o metodă de calcul în manieră geometrică a numărului de soluții al ecuațiilor diferențiale de un anumit tip, asemănătoare faptului bine-cunoscut că un polinom de gradul n într-o singură variabilă are întotdeauna exact n soluții complexe, numărate cu tot cu multiplicități.”



Atiyah (al doilea din dreapta) împreună cu familia regală engleză

Atiyah iubea Italia și o vizita adesea. Așa se face că, în decursul anilor, am avut onoarea și plăcerea să-l invit la diferite manifestări: Festivalul de Matematică de la Roma, în 2007, Milaneziana, în 2008 și 2013, Forumul internațional de cultură de la Paestum, în 2014. Cu prima dintre aceste ocazii am fost primiți la Quirinale, alături de ceilalți participanți la festival, iar el mi-a potolit emoția de neofit al Palatului povestindu-mi că deja cunoscuse mai mulți președinți italieni, în ocazii foarte diferite: în particular, pe Sandro Pertini, când i s-a decernat Premiul Feltrinelli, în 1981.

În 2015 m-a invitat el la Heidelberg, la întâlnirea anuală a medaliaților Fields și a premianților Abel, nu pentru vreun merit al meu special, ci pentru că soția sa era internată în spital și el m-a rugat să-l însoțesc. A fost o ocazie unică de a fi în contact strâns, pentru o săptămână întreagă, cu mintea sa strălucită și în continuă efervescență, și de a-l vedea în acțiune în situațiile cele mai diferite, de la conferințele pentru savanții congresului până la întâlnirile cu elevi.

Am vorbit cu el pentru ultima oară la începutul lui septembrie 2018, când l-am invitat la inaugurarea expozițiilor de matematică din 2019, de la Matera, în anul acela Capitală Culturală Europeană. Mi-a spus că avea să vină, adăugând: „Aș putea vorbi despre ipoteza lui Riemann¹, tocmai am demonstrat-o.“ Am crezut că glumește, cum făcea deseori, dar mi-a confirmat: „Chiar mi-a ieșit, cu o demonstrație minunată care o leagă de constanta structurii fine.“²

A prezentat demonstrația la puțin timp după congresul de la Heidelberg: nimeni n-a crezut-o, dar știrea falsă tot a făcut înconjurul lumii. În realitate, 2018 a fost un *anno horribilis* pentru Atiyah: își pierduse soția și fratele, iar fiul fusese internat într-un spital psihiatric. Evident, el își căutase liniștea în

1. Vezi secțiunea „Un orb vizionar“.

2. Vezi secțiunea „Fizicienii dau numere“.

matematică, asemenea lui Pascal¹, dar fără să mai aibă luciditatea necesară ca s-o găsească.

Ne vom aminti de personalitatea lui vulcanică, de conversația explozivă și de ironia biciuitoare. Mi-am înrămat în birou o frază pe care o rostise la Paestum: „Ca să reușești, trebuie să lupți.” Condiția e necesară, totuși nu suficientă, mai cu seamă în fața morții, căreia Atiyah i s-a înclinat pe 11 ianuarie 2019.

1. Vezi secțiunea (Gândurile serioase ale unui mistic).

ȘTIINȚĂ



GEOGRAFIE

CALENDARE RAȚIONALE

Anul solar

Vrând să aproximeze lungimea anului solar, vechii egipteni au început să folosească un calendar cu 360 de zile, subîmpărțit în 12 luni de câte 30 de zile fiecare. Au descoperit însă mai târziu că 365 era o aproximație mai bună, așa că au adăugat celor 360 de zile inițiale alte cinci, numite *epagomeni*, „suplimentare“, care se inserau înainte de prima zi a anului – această dată fiind mobilă la ei, depinzând de momentul revărsării Nilului. Apoi, ca să țină cont de următoarea aproximație mai bună, anume de 365 de zile și 6 ore, au adăugat încă o zi o dată la patru ani.¹

Romanii au pornit mai puțin sofisticat, cu calendarul lui Romulus, care alterna zece luni de treizeci sau treizeci și una de zile, deci cu un total de 304 zile într-un an. La început, lunile erau enumerate în manieră ordinală, după cum vedem din unele nume încă în vigoare: septembrie (7), octombrie (8), noiembrie (9), decembrie (10). Apoi au schimbat numele primelor patru luni, care au devenit martie, aprilie, mai și iunie în onoarea lui Marte, a deschiderii mugurilor, a zeiței Maia (sau poate a celui mai mare dintre zei, Jupiter) și a soției lui Jupiter, Iunona.

Numai Pompiliu a făcut mai realist anul roman, adăugându-i cele două luni de la început, ianuarie și februarie, dedicate

1. Vezi secțiunea „Numerele lui Iosif și ale fraților săi“.

lui Ianus cel cu două fețe și lui Februarius, zeul purificării, astfel ajungând la 355 de zile. Tot el a mutat începutul anului de la 1 martie, din apropierea echinocțiului de primăvară, la 1 ianuarie, în apropierea solstițiului de iarnă.

În anul 46 î.e.n., Iulius Cezar a unificat calendarele roman și egiptean, ajungând la 365 de zile și adăugând un an „bisect” la fiecare patru ani, numit astfel pentru că introducea o „dublă zi a șasea”, 24 februarie, înainte de calendele lui martie (1 martie): în treacăt fie spus, calendele erau zilele de la începutul fiecărei luni și evident că de la ele derivă cuvântul calendar. În fine, Augustus i-a dedicat predecesorului său luna a cincea, iulie, și sieși luna a șasea, august.

Încă mai bine a fost aproximată durata anului de calendarul dezvoltat de Cristophorus Clavius, introdus de papa Grigore XIII în 1582 și în vigoare încă în cele mai multe țări din lume, calendar care a adăugat următoarea inovație: la fiecare o sută de ani se elimină un an bisect, excepție făcând fiecare al patrulea secol. De exemplu, anii 1700, 1800 și 1900 nu au fost bisești, dar 1600 și 2000 au fost.

În termeni matematici, durata anului iulian era de 365 de zile plus $1/4$, adică 365,25. În schimb, durata anului gregorian e de 365 plus $1/4$ minus $1/100$ plus $1/400$, deci 365,2425. Diferența e 7,5 zile pe mileniu, deci de circa 10 zile între 325, anul în care conciliul de la Niceea adusesese la zi calendarul iulian, și 5 octombrie 1582, ziua care a devenit 15 octombrie.

Astăzi, s-a determinat experimental că durata medie a anului solar este de aproximativ 365,2422 zile, și putem găsi în manieră teoretică aproximații mai eficiente decât precedentele, la care se ajunsese în mod empiric, prin încercări. Într-adevăr, orice număr rațional se poate aproxima optim prin șirurile reduse ale *fracției sale continue*, obținută prin iterarea algoritmului de împărțire cu rest al lui Euclid.

În cazul anului solar, avem de împărțit 1 la 0,2422, obținând 4,1288. Așadar, prima aproximație a lui 0,2422 este $1/4$,

corespunzând corecției anului iulian. Apoi se împarte 1 la 0,1288, obținând 7,7640: a doua aproximație a lui 0,2422 e deci $1/(4+1/7)$, adică $7/29$. A treia aproximație se obține analog, este $8/33$, și corespunde lui 0,2424, fiind deci mai bună decât corecția 0,2425, corespunzătoare anului gregorian.

Altfel spus, calendarul gregorian, care adaugă 97 de zile la fiecare 400 de ani, nu e doar mai complicat decât unul care adaugă 8 la fiecare 33, dar și greșește cu o zi în plus la fiecare 10 000 de ani față de acesta. În mod surprinzător, tocmai acest calendar alternativ fusese propus de poetul matematician Omar Khayyam, autorul celebrelor *Rubbayat* (*Catrene*). Calendarul a fost imediat adoptat de sultanul Malik Shah în 1079 și încă e folosit în Iran și Afganistan, două țări pe care le privim adesea, greșind, firește, cu un anume dispreț cultural.

Chiar dacă e mai bun decât cel gregorian, care greșește cu trei zile la fiecare 10.000 de ani, și calendarul lui Khayyam greșește cu două zile la 10.000 de ani. Pentru a obține unul fără erori, ar trebui considerată aproximația a patra a lui 0,2422, care e $31/128$ și se rotunjește exact la 0,2422. Fiind însă mai complicată decât acel $8/33$ al lui Khayyam, chiar dacă nu mai complicată decât $97/400$ a lui Clavius, nu a fost niciodată adoptată în practică. Așadar, Khayyam deține recordul pentru calendarul cel mai rațional folosit undeva în lume.

POVEȘTI POSTMERIDIANE

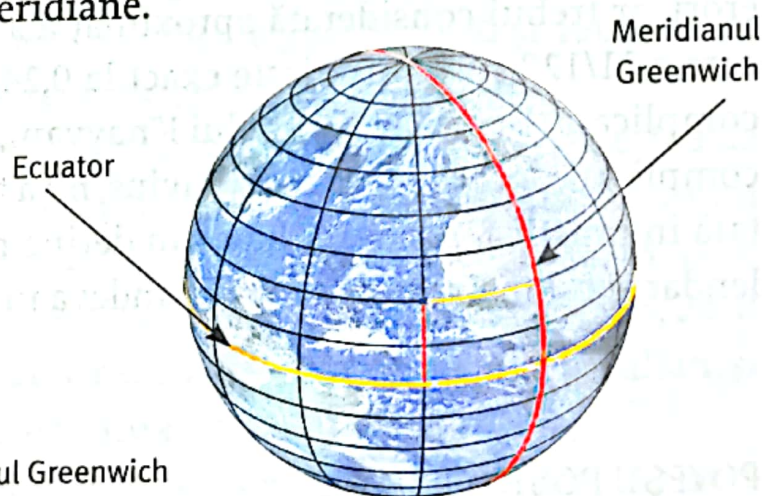
Meridiane

Pare să fi fost Pitagora primul care a înțeles că Pământul e (aproape) rotund – motivațiile lui au fost rezumate mult după aceea de Aristotel în *Tratatul despre cer*. Când un vapor vine către noi de după linia orizontului, îi vedem întâi catargele și abia apoi puntea. În plus, deplasându-ne de la nord către sud, vedem unele vechi constelații apunând, în timp ce răsar unele

noi. În sfârșit, în timpul eclipselor de Lună, umbra aruncată pe Lună de Pământ are formă circulară.

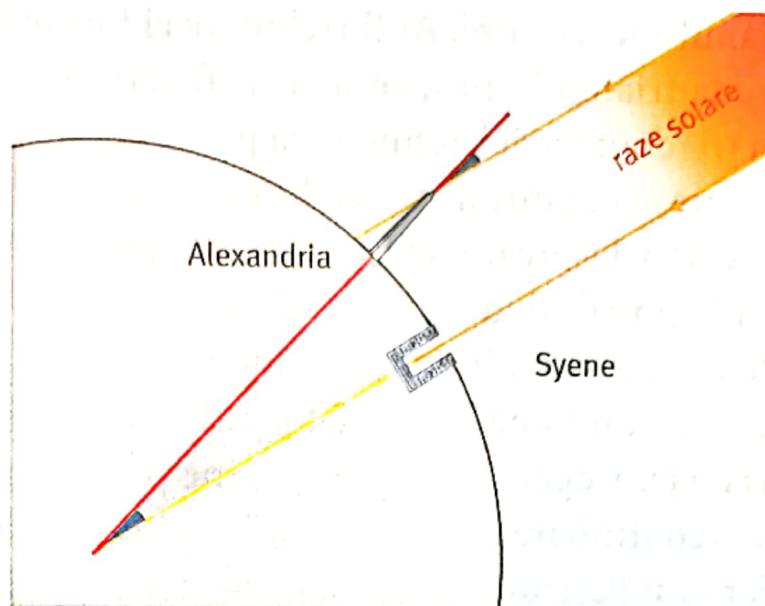
Cum sfera terestră se rotește în fiecare zi în jurul său, unul dintre cercurile sale de rază maximă are o situație privilegiată: ecuatorul, definit ca intersecție a suprafeței terestre cu planul perpendicular pe axa de rotație și care trece prin centru. Sau, echivalent, ca loc geometric al punctelor pe care, la echinocții, Soarele cade perpendicular la amiază.

Alte cercuri mari privilegiate sunt cele care trec prin poli, numite *meridiane*. Prin fiecare punct al suprafeței terestre trece câte un meridian, direcția lui fiind indicată de poziția Soarelui la amiază, de unde și numele, care vine de la *meridies*, „amiază”. Nici unul dintre ele nu e privilegiat, dar ajunge să alegem unul pentru a obține o axă de referință verticală care, adăugată axei orizontale a ecuatorului, furnizează un sistem de coordonate sferice bazate pe longitudine și latitudine, măsurate respectiv pe ecuator și pe meridiane.



Ecuator și meridianul Greenwich

Primul care a măsurat un arc mai lung de meridian a fost Eratostene, profitând de faptul că, în Egipt, Nilul curge aproximativ în direcția nord-sud. Legenda spune că a făcut măsurătoarea între Alexandria și Syene, în apropierea actualului Assuan, pe baza numărului de zile de călătorie necesar pentru a merge dintr-un oraș în celălalt cu cămila, înmulțit cu distanța medie parcursă de o cămilă într-o zi.



Acestui calcul prozaic Eratostene i-a adăugat totuși o intuiție poetică. Într-adevăr, alesese Syene pentru că știa că se află aproximativ pe Tropicul Cancerului: asta înseamnă că, la solstițiul de vară, Soarele la amiază e aproape perpendicular pe el. În acea zi a măsurat Eratostene lungimea umbrei unui băț la Alexandria, deducând astfel unghiul la centru (terestru) dintre cele două orașe, și a făcut raportul dintre lungimea întregului meridian și porțiunea măsurată. Tradus în termeni moderni, rezultatul a fost de cam 40.000 de kilometri, aproximativ valoarea reală.

Aproximarea e prea bună ca să fi fost întâmplătoare. Așa că Lucio Russo, în cartea sa *Revoluția uitată*¹, a lansat ipoteza că, de fapt, Eratostene ar fi folosit măsurătorile făcute de agrimensoarii însărcinați să actualizeze anual registrele de cadastru agricol ale faraonilor, pentru a ține cont de schimbările revărsărilor Nilului. În fond, tocmai în acest scop se născuse în Egipt geometria: de unde și numele său grecesc, care înseamnă chiar agrimensură (de la *geo* și *metrein*).

Dar pentru a face măsurători precise trebuia ținut cont de faptul că Nilul nu era perfect rectiliniu, iar Syene nu era chiar

1. *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 1996.

pe meridianul Alexandriei. Ar fi trebuit deci folosită la scară mare metoda triangulărilor, ceea ce ar fi cerut cunoașterea teoretică a trigonometriei, tehnologia practică a instrumentelor indicatoare și organizarea socială a Egiptului faraonic. Ar fi fost deci vorba despre o adevărată „mare operă” a Antichității, neegalată timp de două mii de ani.

Nu e de mirare că un literat-matematician ca Denis Guedj a povestit-o într-un roman intitulat *Părul Berenicei*¹, în care re-aduce la viață țara, epoca, omul Eratostene și realizarea lui. Și care a avut o continuare istorică, *Meridianul*², dedicată măsurării meridianului Parisului de către Jean-Baptiste Delambre și Pierre Méchain, pe la sfârșitul secolului XVIII: o realizare care a depășit-o pe a lui Eratostene datorită noutăților teoretice ale trigonometriei sferice, ale noutăților practice ale cercului repetitor și ale noutăților sociale aduse de Revoluția Franceză.

Sunt multe alte meridiane cărora li s-ar putea dedica romane, de la cel al Capului Verde, folosit de Ptolemeu ca să aibă în Europa numai longitudini pozitive, până la cel al Ujjain, folosit și azi pentru a fixa ora pe întreg subcontinentul indian. Jules Verne și-a ales însă meridianul Capului Bunei Speranțe ca să povestească *Aventurile a trei ruși și trei englezi în Africa australă* (1872), fiind primul care a arătat că până și geodezia poate deveni subiect de roman științific, deopotrivă distractiv și instructiv.

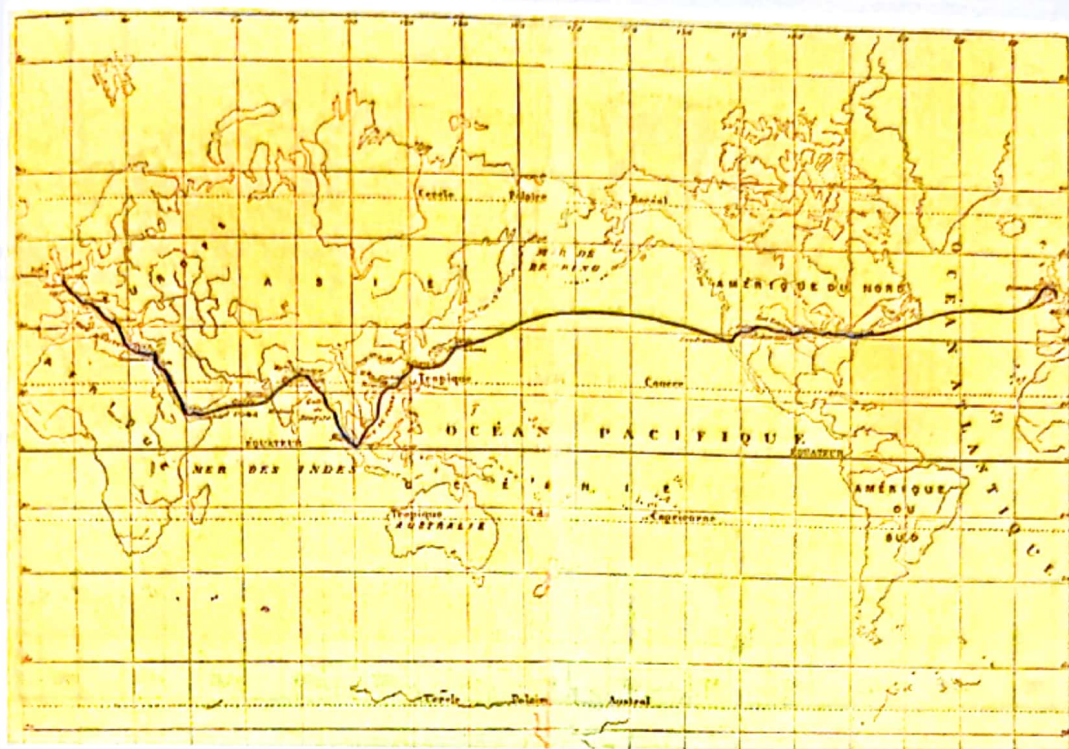
CURSĂ ÎMPOTRIVA SOARELUI

Fuse orare

La trei luni după publicarea romanului *Ocolul pământului în 80 de zile* (1873), în siajul succesului imediat repurtat, Jules Verne a fost invitat să țină o conferință despre „Meridiane și calendar”.

1. *Les cheveux de Bérénice*, Le Seuil, 2003.

2. *La méridienne*, Editions Seghers, 1987.

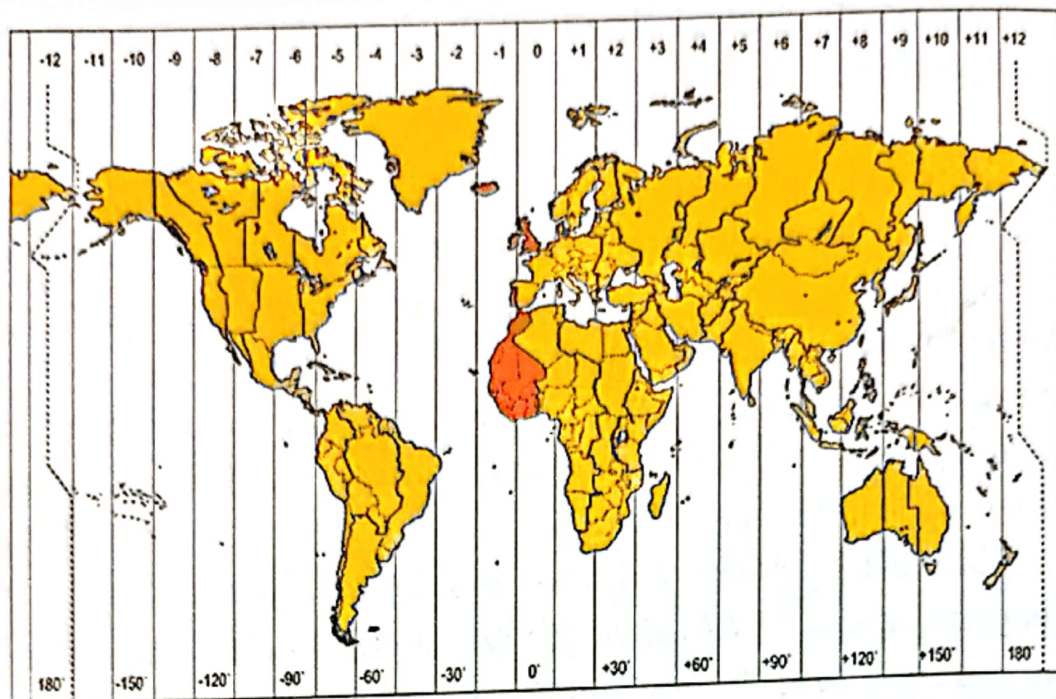


Hartă din Ocolul pământului în 80 de zile

Legătura dintre cele două subiecte era dată de celebra parte finală a romanului, în care călătorul Phileas Fogg descoperă că, mergând în jurul lumii către est, câștigase o zi. Motivul e simplu: în timp ce Fogg încheie o rotație reală către est, Soarele încheie în raport cu el o rotație aparentă către vest, care se adaugă celor făcute zilnic în jurul Pământului în aceeași direcție.

Altfel spus, dacă înconjurăm Pământul în direcția est, vedem Soarele răsărind o dată în plus decât l-am vedea dacă am sta nemișcați în același loc, pentru că trebuie să adăugăm numărului de treceri ale lui prin dreptul nostru într-o direcție încă o unitate, anume trecerea noastră prin dreptul lui în direcția opusă. Astfel, în timp ce londonezii au văzut 80 de răsăriri și asfințituri, Phileas Fogg a văzut 81, chiar dacă pentru toți s-a scurs, de fapt, același timp.

Astăzi, călătoriile cu avionul ne-au obișnuit să fim și mai preciși: de fiecare dată când trecem de la un fus orar la cel succesiv, trebuie să dăm ceasul înainte cu o oră dacă mergem spre est și să-l dăm înapoi cu o oră dacă, dimpotrivă, zburăm

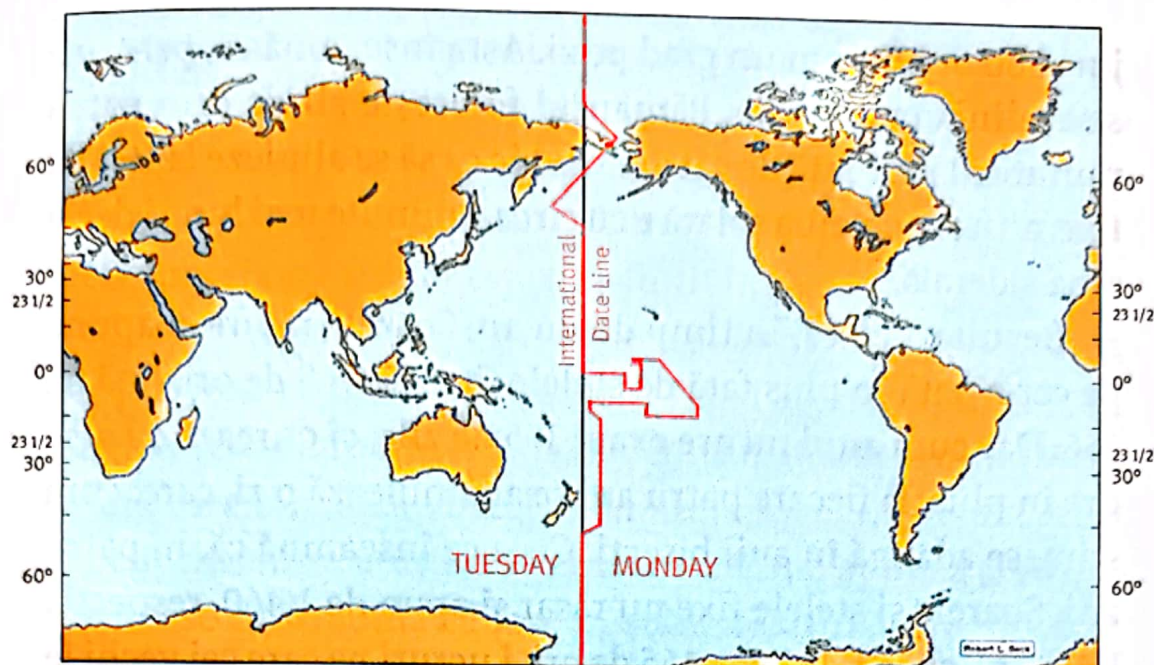


Fuse orare

spre vest. În conferința sa însă, Jules Verne s-a referit la o problemă pusă de matematicianul Joseph Bertrand, consilierul său științific: ce se întâmplă dacă ne deplasăm de-a lungul ecuatorului către vest, înconjurându-l complet în 24 de ore? Cum viteza noastră e de un fus pe oră și, la trecerea de la un fus la altul trebuie să dăm ceasul înapoi cu o oră, ar însemna că ceasul rămâne nemișcat la aceeași oră (de pornire), chiar dacă minutele și orele se scurg.

Nu e nimic paradoxal, pentru că înconjurând ecuatorul în 24 de ore spre vest înseamnă pur și simplu a te deplasa în direcție inversă rotației Pământului și cu aceeași viteză: în consecință, poziția Soarelui și respectiva oră solară nu se schimbă de-a lungul călătoriei. E clar însă că timpul nu se oprește, pentru că atunci când revenim la punctul de plecare am pierdut o zi, ajungem deci în ziua următoare. Problema pusă de Bernard este: când începe această nouă zi, ținând seama că ora rămâne neschimbată în timpul călătoriei, pe toate fusele?

Răspunsul este, evident, convențional: depinde de meridianul ales ca referință pentru amiază și care azi e, pentru toată



Linia convențională a schimbării datei

lumea, Greenwich. Pe timpul lui Verne însă doar Anglia se orienta după Greenwich, în timp ce pentru Franța meridianul ales era cel al Parisului, iar pentru Statele Unite – Washingtonul etc. Ba chiar, Alaska a menținut ora rusă până când a fost vândută Statelor Unite, în timp ce teritoriile cu care se învecina foloseau ora americană.

Unul dintre avantajele meridianului Greenwich este că acela opus lui cu 180 de grade, așa-numita „linie internațională a schimbării datei”, instituită în 1884, trece prin Oceanul Pacific: scăpăm astfel de paradoxul aparent al fuselor geografic adiacente, dar defazate temporal cu o zi, paradox folosit de Umberto Eco în *Insula din ziua de ieri*.*

Verne observă că adausul de o oră la un fus orar echivalează cu 4 minute la un grad, pentru că fiecare fus orar măsoară 15 grade, pentru un total de 360. Acum, 4 minute sunt exact timpul de care are nevoie Pământul ca să se rotească în jurul lui cu un grad, din moment ce o rotație completă înseamnă 24 de ore, rotindu-se cu 15 grade pe oră. În plus, Pământul are nevoie de un an, adică aproximativ 360 de zile pentru o rotație în

* Editura Pontica, 1995 (n. tr.).

jurul Soarelui: cam un grad pe zi. Asta înseamnă că, pentru a se realinia cu Soarele, Pământul folosește zilnic cam patru minute în plus față de cât are nevoie ca să se alinieze la stelele fixe: altfel spus, ziua solară e cu circa 4 minute mai lungă decât ziua siderală.

Rezultatul e că, în timp de un an, Soarele răsare și apune pe cer o dată în plus față de stelele fixe: de 365 de ori, față de 366. Dar cum anul nu are exact 365 de zile, ci durează cu șase ore în plus, la fiecare patru ani se acumulează o zi, care, cum știm, se adaugă în anii bisecți. Ceea ce înseamnă că, în patru ani, Soarele și stelele fixe nu răsar și apun de 1.460, respectiv 1.464 ori, ci de 1.461 și 1.465 de ori. Lucruri pe care cei vechi le știau deja – spre deosebire de ignoranții cititori din vremea lui Jules Verne, pe ei nu i-ar fi uimit pățania lui Phileas Fogg.

A ȚINE CURSUL

Loxodrome

În cântul al cincilea al *Odissei*, Ulise se întoarce în sfârșit acasă, navigând din insula Ogygia (azi Gozo), unde trăise șapte ani alături de nimfa Calipso, către insula Itaca, unde soția lui, Penelopa, îl aștepta de douăzeci de ani. În douăsprezece versuri,



Homer furnizează cu precizie datele călătoriei, spunând că eroul navigase optsprezece zile, uitându-se întâi fix către Pleiade, apoi către „Văcarul care-apune târziu” și lăsând mereu în stânga sa „Ursa poreclită carul, Vârtelnicul-în-loc și Ochitorul lui Orion, și care singur este neasfințit în Ocean“.*

Cursul acesta straniu se datorează faptului că, la căderea nopții, Ulise vedea întâi Pleiadele. Când acestea apuneau, se putea orienta după Arcturus din constelația Boarului (Văcarului), care rămânea vizibilă mai mult: așadar, cursul corect era cuprins între aceste două extreme. Când apunea și Arcturus, Ulise se străduia să lase în stânga Carul Mare: fiind în emisfera septentrională, aceasta e singura deplasare de la vest către est.

Acest fragment din Homer ne arată cât de dificilă era pe atunci navigația, orientându-te numai după stele: în particular, la apus, Ulise naviga în zigzag, noaptea avea o singură indicație limitativă, iar ziua trebuia să încerce să meargă de la vest la est după Soare. Totul s-a schimbat, evident, când a apărut busola, iar primul care a propus păstrarea unui curs cu un unghi constant față de direcția nordului magnetic a fost portughezul Pedro Nunes, în *Tratat în apărarea hărților de navigație* (1537).

După cum se vede din chiar titlul cărții, problema de rezolvat era de ordin cartografic: trebuiau desenate hărți geografice care să traducă acele curbe sferice de înclinație constantă față de nord în linii drepte pe hârtie. În particular, chiar dacă meridianele converg în poli, ele trebuiau reprezentate ca drepte paralele.

Sunt multe modalități de-a o face. De exemplu, e suficient să înfășori o foaie de hârtie în jurul ecuatorului unei sfere căreia să-i proiectezi apoi suprafața pe foaia de hârtie, din centrul sferei: se obține însă o hartă cilindrică infinită. Sau se poate proiecta suprafața sferei pe o foaie perpendiculară pe axa polilor, caz în care un segment e foarte puțin deformat

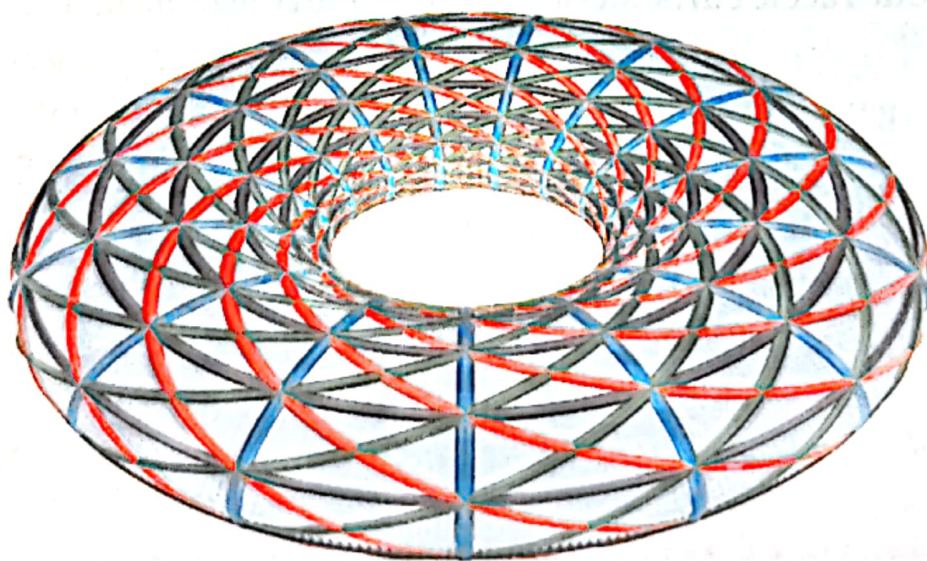
* Traducere de George Murnu (n. tr.).

dacă se află în apropierea ecuatorului, dar e foarte mult deformat când stă în apropierea polilor.

Soluția care avut câștig de cauză pentru navigație a fost cea propusă de Mercator în 1569, care modifica treptat scara de deformare, pe măsura apropierii de poli, în așa fel încât liniile drepte de pe hartă, care unesc două puncte, să corespundă efectiv cu liniile curbe de pe sferă care formează mereu același unghi cu meridianele. Aceste linii spiraliforme se numesc *loxodrome*, sau „trasee curbe“ (de la *loxos* și *dromos*): exemplele tipice, în afară de meridiane și paralele, sunt cojile de portocală tăiate ținând cuțitul la unghi constant față de axă.

Dar drumul cel mai scurt între două puncte nu e pur și simplu o loxodromă oarecare, trebuie să fie un cerc maxim, ca ecuatorul sau un meridian. În particular, dacă două puncte stau pe o paralelă, ca New York și Napoli, parcurgerea paralelei e comodă pentru navigația maritimă cu busola, dar nu e drumul cel mai scurt: într-adevăr, avioanele urmează un curs care se îndepărtează de paralelă și apare ciudat de curbat pe hartă.

Loxodromele există și pe alte suprafețe curbe decât sfera. De exemplu, prin fiecare punct al unui tor trec două cercuri (o paralelă și un meridian) perpendiculare unul pe celălalt: unul în planul paralel cu ecuatorul torului, celălalt în planul perpendicular care trece prin centru. Dar există încă două, zise





Spirale sferice și Suprafață sferică cu pești, de Escher

cercurile lui Villarceau, care sunt loxodromele ce intersectează paralelele și meridianele sub un unghi constant. Tăind de-a lungul lor torul, se obțin felii ca acelea folosite de Brunelleschi, în prima jumătate a secolului XV, pentru cupola dodecaedrică în formă de umbrelă a Capei Pazzi de la Florența.

Cele mai bune expresii artistice ale loxodromelor le-a obținut însă Escher, într-o serie de opere din anii cincizeci. Întâi, în manieră matematică aproximativă, în *Rind* (1955), *Trăsătură de unire* (1956) și *Vârtejuri* (1957). Apoi, mai precis din punct de vedere matematic, în *Spirale sferice* (1958) și *Suprafață sferică cu pești* (1958), ca o confirmare a interesului său pentru aspectele mai puțin cunoscute ale matematicii.

DOUĂZECI ȘI TREI DE GRADE ȘI JUMĂTATE

Axa terestră

Pare să fi fost Parmenide primul care a observat că Luna nu luminează cu lumină proprie, ci cu lumina reflectată a Soarelui. În cartea *Lumea lui Parmenide* (1998), Karl Popper consideră această descoperire drept scânteia care a dus la nașterea filozofiei ființei. Înțelegând că fazele Lunii nu depind de schimbări

interne ale Lunii, fiind doar aparențe exterioare produse de mișcarea sa și de lumina Soarelui, Parmenide ar fi dedus de fapt că în spatele schimbătoarei deveniri a Lunii și, mai general, a tuturor lucrurilor, se ascunde o ființă stabilă și neschimbătoare.

Parmenide a trăit în jurul anului 500 î.Cr.: au fost de ajuns trei secole ca timidele sale anticipări să fie transformate într-o teorie sofisticată a mișcărilor celeste. Stă mărturie poemul *Hermes*, al matematicianului Eratostene, mort pe la 200 î.Cr. Într-un fragment al poemului, zeul se înalță la cer și observă de sus Pământul împărțit în cinci zone astronomice: fâșia toridă din jurul ecuatorului, cele două calote polare înghețate și cele două zone temperate intermediare.

Pentru a defini precis aceste zone e nevoie de cunoașterea detaliată a mișcării aparente a Soarelui, lucru deloc banal. La prima vedere, pare că Soarele se limitează să se rotească zilnic, în cerc, în jurul Pământului. Dar în decursul anului ne dăm seama că orbita circulară se deplasează pe cer, ridicând și coborând traseul Soarelui în funcție de anotimp.

La început, Anaxagoras și-a imaginat doar că planul orbitei zilnice a Soarelui s-ar deplasa paralel cu el însuși în sus și-n jos în timpul unui an, ca un acoperiș. Aristarh a avut însă o intuiție mult mai precisă, înțelegând că se poate reduce la combinarea



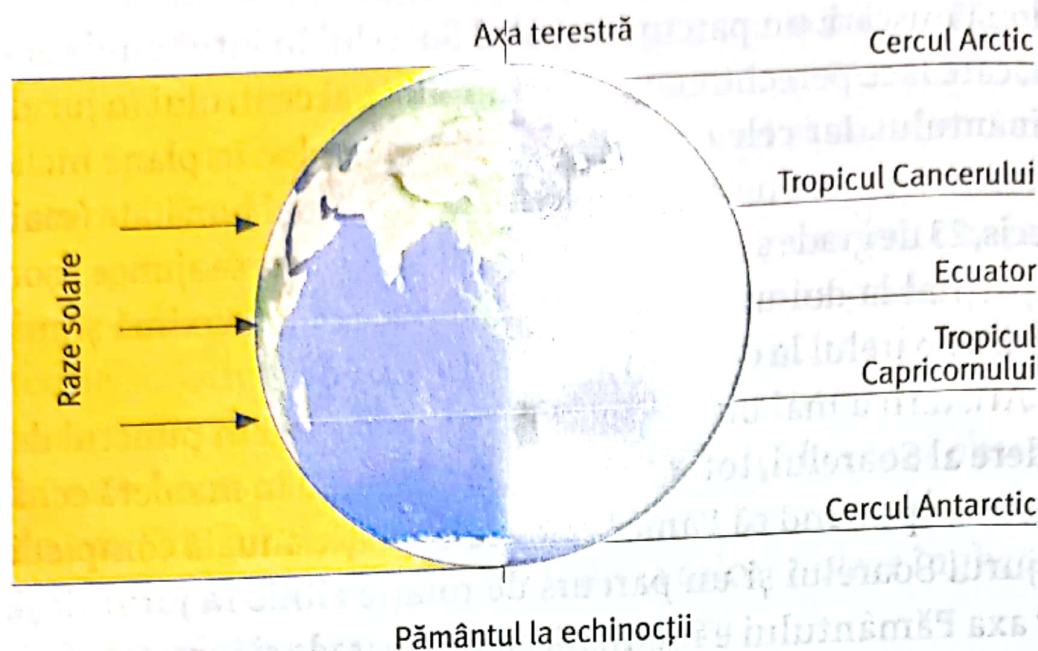
a două mișcări: un parcurs anual al Soarelui în jurul unui centru, care face pereche cu un parcurs zilnic al centrului în jurul Pământului. Iar cele două parcurhuri aveau loc în plane înclinate între ele la un unghi de vreo 23 de grade și jumătate (mai precis, 23 de grade și 27 de minute): valoare la care se ajunge ușor împărțind la doi unghiul format de înălțimea maximă și minimă a Soarelui la cele două solstiții.

Aristarh a mai observat că, dacă se plasează în punctul de vedere al Soarelui, totul s-ar putea reformula în manieră echivalentă, spunând că Pământul face o rotație anuală completă în jurul Soarelui și un parcurs de rotație zilnic în jurul sieși. Iar axa Pământului e înclinată cu 23 de grade și jumătate față de planul orbitei, numit *ecliptică* pentru că eclipsele au loc atunci când Luna traversează acest plan.¹

Dacă axa de rotație ar fi perpendiculară pe ecliptică, atunci zona toridă ar fi redusă la ecuator, pe care Soarele ar fi perpendicular la amiaza fiecărei zile din an și nicăieri altundeva, iar calotele polare ar fi reduse la cercurile polare, delimitate de tangentele la Pământ duse din Soare, adică de marginile exterioare ale conului de umbră terestră. Pe calote, Soarele n-ar apune niciodată, iar peste tot ziua ar fi un pic mai lungă decât noaptea: întotdeauna cu aceeași durată, cum se întâmplă la echinocții, fără anotimpuri.

Din cauza înclinării axei terestre, în schimb, paralelele pe care Soarele își atinge extremele parcursului său se situează la aproximativ 23 de grade de ecuator; numite *Tropicul Cancerului* la nord și, respectiv, *Tropicul Capricornului* la sud, ele determină

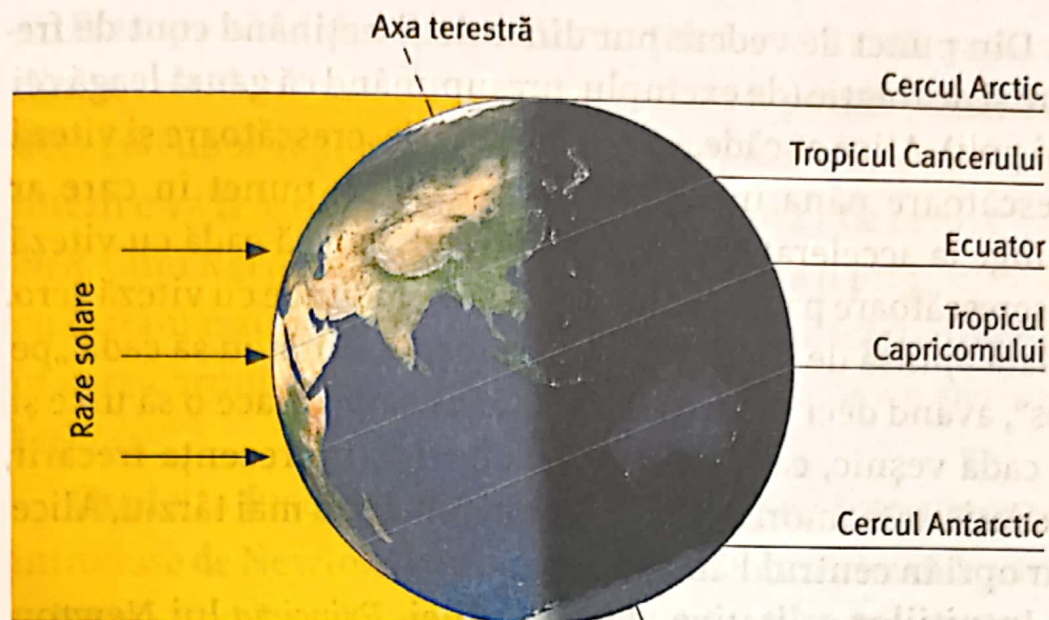
1. Din punctul de vedere terestru al lui Anaxagoras și Ptolemeu, planul eclipticei are o mișcare basculantă anuală față de axă. Din punctul de vedere solar al lui Aristarh și Copernic, axa terestră înregistrează o mișcare conică anuală față de perpendiculara pe ecliptică. Din punctul de vedere sideral al lui Newton, ecliptica și axa terestră păstrează anual aceeași direcție față de stelele fixe, iar cele două mișcări anterioare sunt doar aparente.



marginile zonei toride în care Soarele se vede perpendicular cel puțin o dată pe an. Ceea ce se întâmplă de două ori, la distanță temporală diferită: de la două zile succesive la tropice, una fiind unul din *solstiții*, până la șase luni distanță la ecuator, anume la *echinocții* (care corespund punctelor de intersecție ale planului ecuatorial cu ecliptica).

Paralelele pe care Soarele își atinge maximumul posibil al duratei zilnice sunt situate la aproximativ 23 de grade și jumătate de poli și se numesc *Cercul Polar Arctic*, la nord, și *Cercul Polar Antarctic*, la sud. Ele determină marginile zonelor unde Soarele se vede o întreagă zi cel puțin o dată pe an, acel așa-zis „Soare de la miezul nopții”. Ceea ce se întâmplă diferit: șase luni la rând la poli, doar o singură zi pe cercurile polare, în unul dintre solstiții (în celălalt petrecându-se fenomenul simetric: Soarele nu se vede deloc în timpul zilei, așa-numitul „întuneric la amiază”).

Oriunde însă există fenomenul zilelor când perioada de lumină este egală cu perioada de întuneric, ca și cum axa terestră nu ar fi înclinată. La ecuator, asta se întâmplă în fiecare zi, în rest doar de două ori pe an: la așa-numitele echinocții, care la poli împart în mod egal perioada „Soarelui la miezul nopții” și a „întunericului de la amiază”, iar la ecuator împart vertical zonele „de zi” de pe Pământ de cele „de noapte”.



Pământul la solstițiul de vară septentrional

CĂLĂTORIE SPRE CENTRUL PĂMÂNTULUI

O problemă a lui Plutarh

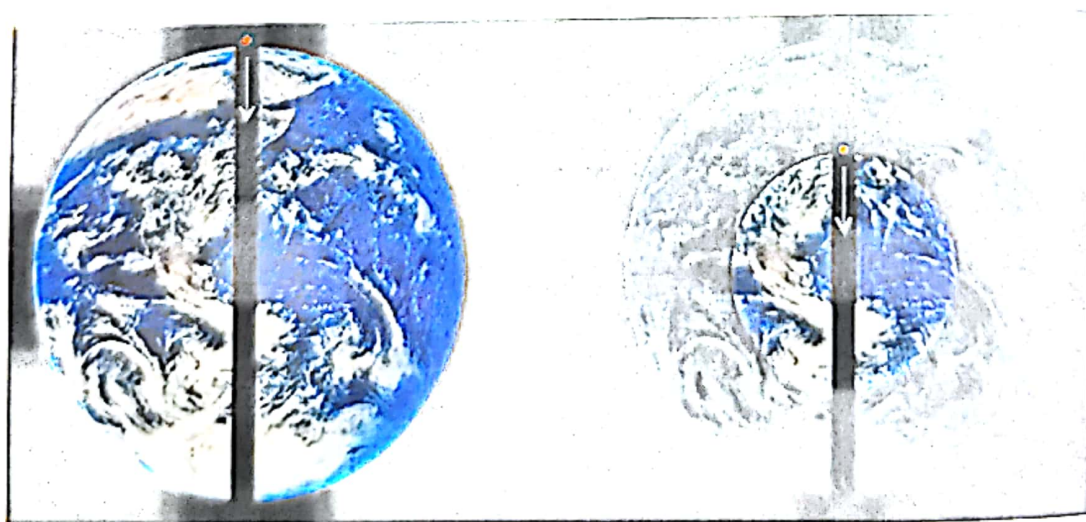
Aventurile lui Alice în Țara Minunilor (1865) încep cu o cădere liberă interminabilă în vizuina iepurelui, în timpul căreia fetița, curioasă, se întreabă dacă va ajunge în centrul Pământului, sau chiar la „antipodici“, cei care stau de partea cealaltă. Dacă întrebarea, câtuși de puțin absurdă, o pusese deja Plutarh, răspunsul, câtuși de puțin banal, îl dăduse deja Galilei în *Dialog despre cele două sisteme principale ale lumii* (1632).



Căderea lui Alice în filmul lui Walt Disney (1951)

Din punct de vedere pur dinamic și neținând cont de frecare și de rotație (de exemplu, presupunând că gaura leagă cei doi poli), Alice ar cădea cu accelerație descrescătoare și viteză crescătoare până în centrul Pământului, punct în care ar ajunge la accelerație zero, continuând apoi să cadă cu viteză descrescătoare până la antipodi, unde ar ajunge cu viteză zero. Odată ajunsă de cealaltă parte, ar începe din nou să cadă „pe dos”, având deci o mișcare oscilatorie care ar face-o să urce și să cadă veșnic, ca prinsă de un elastic. În prezența frecării, oscilația ar fi amortizată și, mai devreme sau mai târziu, Alice s-ar opri în centrul Pământului.

Intuițiilor calitative ale lui Galilei, *Principia* lui Newton (1687) le-au adăugat posibilitatea tratării cantitative a problemei. Pentru a calcula mișcarea unui corp în cădere liberă în interiorul Pământului pe care, pentru simplitate, îl presupunem sferic, trebuie să cunoaștem accelerația la care e supus corpul. Conform legii gravitației¹, pe suprafața Pământului accelerația e egală cu $g = GM/R^2$, unde M și R sunt masa și raza terestre, iar G este constanta gravitațională universală. În interiorul Pământului, la distanță r de centru, accelerația va fi Gm/r^2 , unde m e masa nucleului intern de rază r : într-adevăr, una dintre descoperirile lui Newton a fost tocmai aceea că acțiunea părții exterioare asupra corpului se anulează.



1. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar”.

Presupunând densitatea Pământului constantă, raportul dintre cele două mase e proporțional cu raportul volumelor, deci cu cubul raportului razelor: astfel, masa m a nucleului intern e va fi Mr^3/R^3 și accelerația la distanță r de centru va fi gr/R . Cum R și g sunt constante, accelerația va fi proporțională cu distanța: suntem deci în prezența unei mișcări armonice, în care corpul oscilează periodic între extreme cu perioada $2\pi(R/g)^{1/2}$.

Oscilația fusese intuită de Galilei, dar cu instrumentele introduse de Newton îi putem calcula durata. Folosind pentru valoarea accelerației gravitaționale celebrii 9,8 metri pe secundă la pătrat, iar pentru raza Pământului valoarea medie de 6.380 kilometri, timpul necesar pentru a călători de la un pol la celălalt e jumătate din perioadă: adică aproximativ 2.535 de secunde, egal cu 42 de minute și 15 secunde. Timp uluitor de scurt, parcurs cu o viteză medie de circa 18.200 de kilometri pe oră, maximumul atingându-se în centru, aproape 28.500 kilometri pe oră, valoare care, nu întâmplător, e și cea a vitezei orbitale a unui corp care se deplasează pe o orbită razantă la suprafața terestră.

După cum intuise deja Galilei, același timp e necesar pentru a te mișca în cădere liberă și fără frecare printr-un tunel rectiliniu care pornește din *orice* punct al suprafeței terestre și ajunge în *orice* alt punct al ei, independent de lungime: într-adevăr, și forța de atracție, și distanța parcursă se micșorează în fiecare punct cu același factor (anume cosinusul unghiului dintre direcția tunelului și verticala prin centru). Observația poate fi deci folosită pentru „soluția finală” a problemei transporturilor: în loc să construim căi ferate la suprafața Pământului, ar fi suficient să perforăm Pământul cu tuneluri rectilinii și să le parcurgem cu trenuri care nu sunt acționate de motoare costisitoare, ci trase de gravitația gratuită.

A vorbit despre asta în glumă Lewis Carroll, în a doua parte a romanului *Silvia și Bruno*¹, atribuind unuia dintre protagoniști, profesorul german Mein Herr, inventarea trenului gravitațional. În 1966, însă, fizicianul american Paul Cooper a propus cu toată seriozitatea chestiunea în *American Journal of Physics*. Știrea a fost imediat preluată de săptămânalul *Time* și a suscitat o discuție aprinsă în media științifice care nu păreau să fie la curent cu faptul că Galilei și Newton rezolvaseră deja exercițiul de fizică, iar Carroll îl plasase deja acolo unde îi e locul: în cadrele literaturii fantastice.

VERDE: CULOAREA SPERANȚEI

Schimbări climatice

Mișcarea Fridays for Future, inspirată de tânăra influencer suedeză Greta Thunberg și popularizată de *social media*, a strâns rapid în jurul ei mulți elevi din diferite țări, mai ales occidentale, care, începând din 2018, au făcut grevă și și-au manifestat îngrijorarea pentru schimbările climatice și pentru viitorul planetei. Evident, una e să fii preocupat de probleme generice și abstracte, pe care le pot enunța foarte bine elevii implicați social, și alta e orientarea către soluții specifice care nu pot fi găsite decât de oameni de știință cu experiență.

Nu e întâmplător că primul care a descris mecanismul schimbărilor climatice a fost matematicianul și fizicianul Joseph Fourier care, cu două secole în urmă deja, scria în *Memoriu asupra temperaturii globului terestru și a spațiilor planetare* (1828):

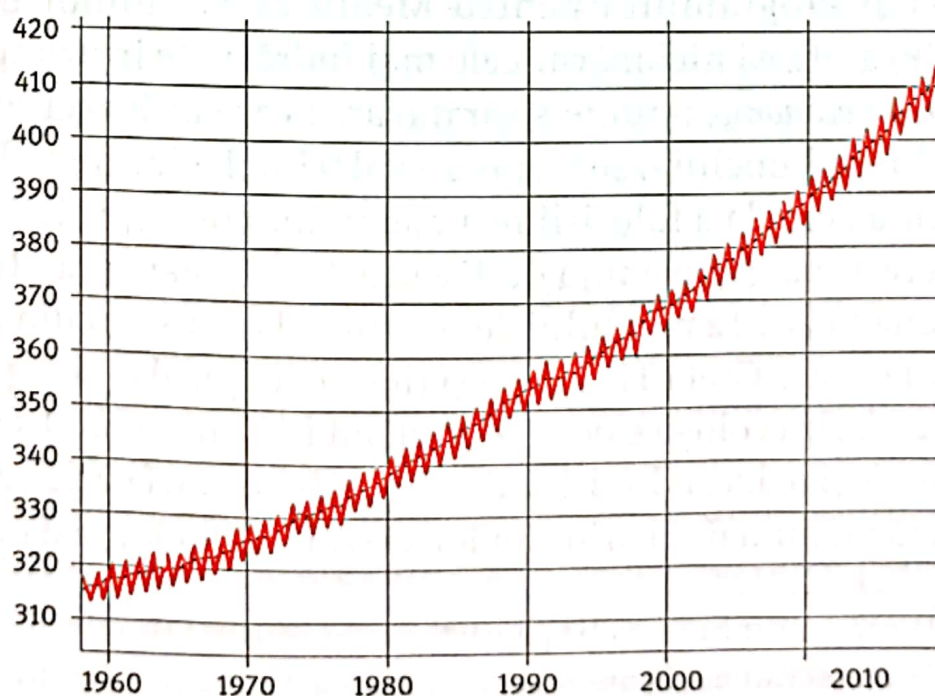
Dezvoltarea și progresul societăților omenești, combinate cu acțiunea forțelor naturale, pot schimba considerabil și extrem starea suprafeței, distribuția apelor și mișcările

1. *Sylvie and Bruno Concluded*, MacMillan and Co., 1893.

atmosferei. În decursul secolelor, aceste efecte pot provoca variații ale temperaturii medii a planetei.

A fost însă chimistul Svante Arrhenius, Premiul Nobel în 1903, cel care, în articolul *Despre influența anhidridei carbonice din atmosferă asupra temperaturii Pământului* (1896), a calculat că înjumătățirea CO_2 ar conduce la o eră glaciară, iar o dublare a lui, la o creștere a temperaturii cu 3 sau 4 grade. În vremea lui, emisiile industriale de CO_2 nu erau îngrijorătoare – abia mai târziu au devenit: *curba lui Keeling*, trasată începând cu 1960 de Charles Keeling la observatorul din Mauna Loa și făcută publică de Al Gore în documentarul de Oscar *Un adevăr incomod* (2006) arată creșterea constantă a anhidridei carbonice în troposferă, de o treime în circa șaizeci de ani, și aproape dublu față de începutul erei industriale.

Departe de a fi trecut neobservate, aceste cercetări și altele încă au avut răsunet, începând cu celebrul raport *Limitele dezvoltării* (1972) al Clubului de la Roma, fondat în 1968 de Aurelio Peccei, până la Premiul Nobel pentru pace oferit în 2007 lui Al Gore și Comisiei interguvernamentale pentru Schimbările Climatice (IPCC) a Națiunilor Unite. Așa că activiștii Fridays for



Future scriu doar cel mai recent capitol al unei lungi istorii de încercări de a sensibiliza opinia publică în această problemă.

Nu se poate spune, totuși, că nu s-ar fi făcut încă nimic pentru depurarea atmosferei. De exemplu, printre gazele cele mai îngrijorătoare din a doua jumătate a secolului XX se numărau clorofluorocarburile și protoxidul de azot emise de circuitele frigiderelor, de dozele de spray și de fertilizante. În 1995, Premiul Nobel pentru chimie a fost câștigat de Paul Crutzen, Frank Rowland și Mario Molina pentru demonstrarea faptului că aceste gaze (și avioanele supersonice) erau responsabile pentru vestita *gaură de ozon*, stimulând redactarea Protocolului de la Montréal din 1987, a cărui imediată adoptare a rezolvat fără mari eforturi problema scăderii ozonului din atmosferă.¹

Mult mai refractară s-a dovedit problema limitării emisiilor de anhidridă carbonică, după cum s-a văzut din eșecul Protocolului de la Kyoto din 1997, coercitiv, înlocuit cu Protocolul de la Paris în 2016, facultativ. Motivul profund al acestui eșec e explicat de o serie de simulări matematice care arată că dezideratul ambientalist de a reveni măcar la nivelul consumului de resurse din 2000 e incompatibil cu cerința economică de a păstra nivelul actual de creștere.

În particular, raportul *Evaluarea folosirii resurselor globale* (2017) al Programului pentru Mediu al Națiunilor Unite (UNEP) arată că nici măcar cele mai îndrăznețe instrumente ale *green economy*, anume suprataxarea care ar înzeci prețul actual al cărbunelui și superprogresul tehnologic care ar dubla eficiența actuală a folosirii resurselor, nu pot împiedica, la o creștere anuală constantă de 2% sau 3%, dublarea sau triplarea până în 2050 a nivelului de consum al resurselor din 2000.

Altfel spus, Greta Thunberg și tinerii din jurul ei și-ar putea realiza visele ecologice doar contestând radical actualul sistem economic și reducându-și drastic propriul consum față de nivelul de viață nu numai al părinților lor, ci și ai fraților lor mai mari.²

1. Vezi secțiunea „Ecuția găurii“.

2. Vezi secțiunea „Economia verde“.

Știința se deosebește de umanioare prin concentrarea sa asupra obiectivității datelor și nu asupra subiectivității impresiilor. Obiectivitatea e totuși relativă, pentru că datele se exprimă într-un sistem de referință. De exemplu, coordonatele carteziene ale unui punct în plan sau în spațiu țin seama de poziția originii și de orientarea axelor, nu au semnificație absolută.

Una dintre cele mai bune ilustrări ale acestei constatări evidente sunt dezbatările tocmai pomenite despre schimbările climatice. Într-adevăr, când se vorbește despre o creștere a temperaturii medii a planetei de două grade până în 2050, se uită aproape întotdeauna să se specifice punctul de referință.

IPCC, laureatul Premiului Nobel pentru pace în 2007, indică în rapoartele sale „a doua jumătate a secolului XIX”. Motivul acestei alegeri e că doar de prin 1850 avem date accesibile despre temperaturile terestre și maritime pe întreaga planetă. Abia din acel moment putem observa în detaliu fluctuațiile pe termen scurt (luni sau ani) sau lung (cincinale sau decenii) ale mediilor planetare și le putem reprezenta prin curbe care devin din ce în ce mai line local, arătând o limpede evoluție globală crescătoare. Potrivit IPCC, creșterea globală a temperaturii a fost de aproximativ 0,85 grade între 1880 și 2012 și de 0,78 grade între mediile perioadelor 1850–1900 și 2003–2012: în orice caz, mai puțin de un grad pe secol.

În schimb, tratatul de la Paris din 2016 vorbește ambiguu despre „niveluri preindustriale” ale temperaturii terestre, lăsând să se înțeleagă că temperatura medie ar fi rămas mai mult sau mai puțin constantă până pe la 1850, și că singurele sale variații ar fi fost produse de industrializare: de unde confuzia sloganurilor ambientaliste care cer ingenuu „salvarea planetei”. În realitate, în timpul celor patru miliarde și jumătate de ani de istorie, temperatura Pământului s-a tot schimbat dramatic,

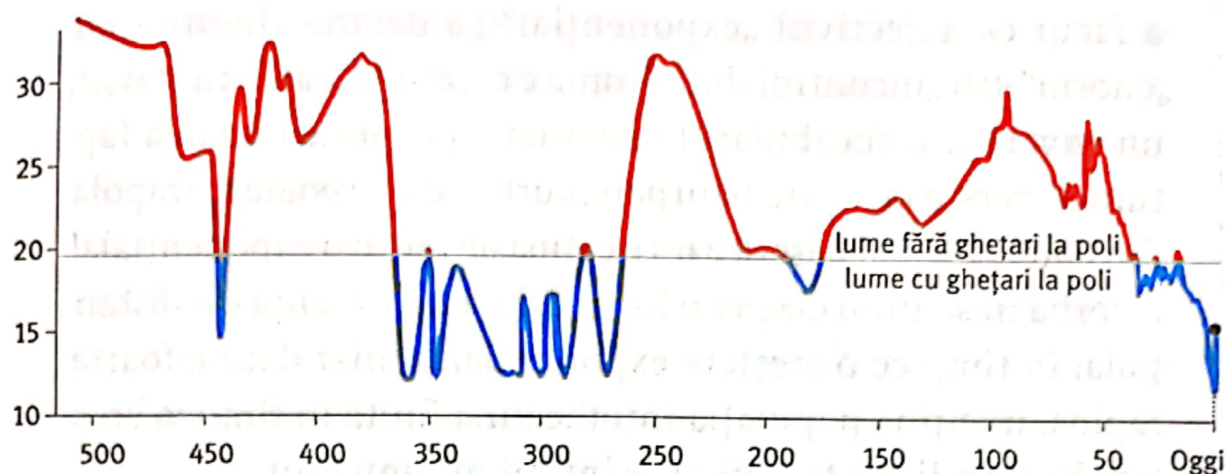
după cum se poate deduce din inelele de corali, din carotajul gheții, din perforațiile geologice, sedimentele oceanice și alte diferite metode.

Ultimul mileniu, de exemplu, a fost martorul a două perioade climatice opuse. Pe de o parte, a existat o supraîncălzire între 900 și 1200 aproximativ, cu temperaturi comparabile nu doar cu cele din a doua jumătate a secolului XIX, dar și cu cele din așa-numita „perioadă romană caldă”, dintre 250 î.e.n. și 400: perioada care i-a permis lui Hannibal să traverseze Alpii cu elefanți. Pe de altă parte, a existat o „mică eră glaciară” între 1400 și aproximativ 1850, când ghețarii au ajuns la întindere maximă: era industrială a încălzit deci planeta cu un grad, dar față de o perioadă anterioară foarte rece.

Privind încă și mai în urmă, perspectiva se schimbă complet. În cursul ultimilor 500.000 de ani, erele glaciare s-au succedat la intervale de circa 100.000 de ani, între ele temperatura urcând la valori mai mari decât cele de azi. Până în urmă cu 3 milioane de ani, termometrul s-a menținut *tot timpul* mult deasupra mediei ultimului mileniu, atingând „maximumul termic din paleocen-eocen” (o creștere de 6 grade) cam în urmă cu 55 de milioane de ani. Întreaga Antarcică, azi continentul cel mai rece, era pe-atunci complet lipsită de gheață și așa a rămas până acum 35 de milioane de ani.

În fine, în ultimii 500 de milioane de ani, perioada de maximă înflorire a vieții terestre, survenită în urma „exploziilor din cambrian”, temperaturile medii ale planetei s-au menținut aproape mereu mult deasupra celor actuale, iar pentru mai bine de două treimi din această perioadă Pământul nu a avut deloc gheață la poli. Dramaticele schimbări climatice din acea vreme au fost provocate de evenimente naturale, precum variațiile activității solare și erupțiile vulcanice.

Schimbările climatice de azi sunt însă provocate de oameni în bună măsură, dar istoria ne arată că ele nu pun câtuși de puțin la îndoială supraviețuirea planetei: pur și simplu, ele



Temperatura medie terestră în ultimii 500 de milioane de ani.
(grafic al Smithsonian Institute)

perturbă condițiile atmosferice, făcându-le mai potrivite pentru unele specii și mai puțin potrivite pentru altele. Dacă specia noastră e atât de stupidă încât să se sinucidă, distrugându-și condițiile de mediu propice supraviețuirii, atunci poate chiar merită să dispară. Pământului însă nu-i va păsa: va face doar loc altcuiva, mai adaptat și mai puțin autodistrugător decât noi.

CREȘTERE HIPERBOLICĂ

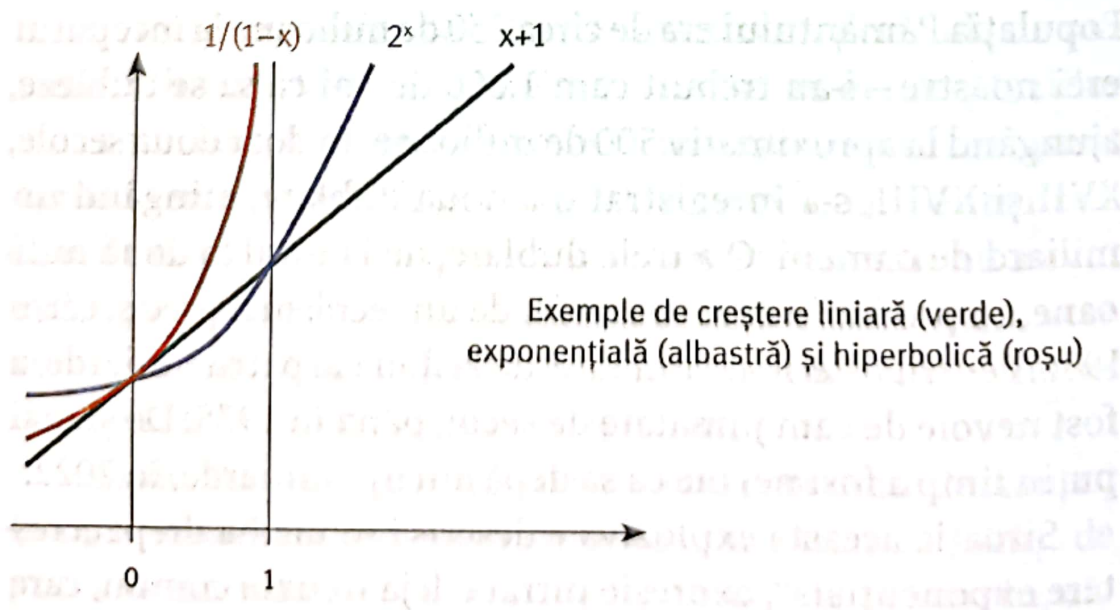
Populație

Populația Pământului era de circa 250 de milioane la începutul erei noastre – i-au trebuit cam 1.600 de ani ca să se dubleze, ajungând la aproximativ 500 de milioane. În doar două secole, XVII și XVIII, s-a înregistrat o a doua dublare, atingând un miliard de oameni. O a treia dublare, de la unul la două milioane, s-a produs în ceva mai mult de un secol: mai precis, către 1930. Pentru ulterioara dublare, de la două la patru miliarde, a fost nevoie de cam jumătate de secol, până în 1975. De și mai puțin timp a fost nevoie ca să depășim opt miliarde, în 2022.

Situația aceasta explozivă e descrisă în media drept „creștere exponențială”, expresie intrată deja în uzul comun, care

a făcut ca adjectivul „exponențial” să devină sinonim cu „enorm” sau „incontrolabil”. Ironia e că, atunci când, în sfârșit, un cuvânt din vocabularul matematic primește onoarea faptului divers, o face prin uzurpare: curba care se poate extrapola din datele tocmai descrise nu e câtuși de puțin o exponențială! E vorba în schimb despre o hiperbolă, iar diferența e substanțială: în timp ce o creștere exponențială, chiar dacă e foarte rapidă, menține populația întotdeauna finită în timp, o creștere hiperbolică o trimite spre infinit în timp finit.

De altfel, diferitele tipuri de creștere a populației se pot clasifica după viteză, măsurată în rata de creștere în timp. Dacă această rată e constantă, adică nu depinde de populație, atunci creșterea e liniară în timp și graficul ei este o dreaptă. Dacă rata e liniară, deci proporțională cu populația, atunci creșterea e exponențială în timp. În fine, dacă creșterea e mai mult decât liniară, atunci creșterea devine superexponențială: în particular, dacă rata e pătratică, adică proporțională cu pătratul populației, atunci aceasta crește în manieră hiperbolică. Exemple clasice pentru cele trei tipuri de creștere avem atunci când populația se dublează în intervale de timp duble (creștere constantă), respectiv egale (creștere exponențială), respectiv la jumătate (creștere hiperbolică).



Datele approximate pe care le-am menționat la început sugerează tocmai o creștere hiperbolică, și nu exponențială a populației. Cel care a observat primul că datele demografice reale din ultimul mileniu al istoriei umane corespund efectiv unei asemenea creșteri a fost fizicianul austriac Heinz von Foerster în 1960: curba sa prezicea catastrofa pentru ziua de vineri 13 noiembrie 2026, ziua celei de-a 115-a aniversări a sale, folosind ceea ce s-a numit perfect oportun *Formula judecății de apoi*.

O versiune mai precisă, găsită în 1975 de Sebastian von Hoerner, e pur și simplu curba $P(2025 - t) = 200$, unde P e populația în miliarde, iar t e timpul în ani. După cum se vede, ecuația are o discontinuitate la $t = 2025$, ceea ce înseamnă tocmai că, dacă creșterea ar continua în același ritm al ultimului mileniu, în 2025 populația terestră ar deveni infinită.

Evident, o asemenea formulă e paradoxală. În trecut, se duce la zero numai la infinit: de exemplu, încă înregistrează prezența a zece persoane acum douăzeci de miliarde de ani, ceea ce e incompatibil cu momentul nașterii universului. În viitor, în mod simetric, se duce la infinit cât ai zice pește: de exemplu, către 2024 înregistrează dublări ale populației în perioade mai mici de un an și din ce în ce mai scurte, incompatibile cu timpii de reproducere ai speciei noastre.

Faptul că reprezentarea matematică a creșterii populației e paradoxală nu înseamnă însă că aceasta n-ar fi corectă: sugerează, mai degrabă, că există alți factori, artificiali ori naturali, care intervin și evită explozia demografică. De exemplu, datele reale arată că populațiile cu creștere înaltă, cum sunt cele din Lumea a Treia, ating un maximum și apoi descresc. În practică, fie oamenii își limitează voluntar nașterile, cu ajutorul planificării familiale și cu anticoncepționale, fie natura intervine în forță, brutal, prin boli și foamete.

PE CÂND SFÂRȘITUL?

Previziunea lui Gott

În vara lui 1969, Richard Gott, proaspăt licențiat în fizică de la Harvard, s-a dus în vacanță la Berlin împreună cu prietenul său Chuck Allen. În fața celebrului zid, Gott a prezis că nu va rezista mai mult de 24 de ani. În toamna lui 1989, Allen l-a sunat pe Gott, de-acum profesor de astrofizică la Princeton, și i-a spus să deschidă televizorul: berlinezii dărâmau zidul, adevărind previziunea făcută cu douăzeci de ani în urmă.

Să fi fost numai noroc? E clar că nu. La momentul acela, Gott făcuse câteva calcule bazate pe o ipoteză destul de plauzibilă pe care, mai târziu, avea s-o numească *principiul copernican*: anume, ipoteza că, atunci când observăm un eveniment, putem presupune că nu ne aflăm în nici un moment privilegiat al observației. În particular, putem presupune cu probabilitate de 50% că ne aflăm chiar în mijlocul duratei evenimentului, sau în intervalul cuprins între un sfert de la început și un sfert de la final.

În cazul zidului, la limită își putea imagina că se află exact la un sfert din durata lui de viață: cum fusese ridicat în 1961,



cu opt ani înainte, însemna că îi mai rămâneau încă trei perioade egale, adică 24 de ani. Tot la limită, dar în cealaltă direcție, și-ar fi putut imagina că se află la exact trei sferturi din durata de viață a zidului: ceea ce ar fi însemnat că zidul ar mai avut o treime din opt ani, adică doi ani și opt luni. Altfel spus, se putea prevedea cu o probabilitate de 50% că zidul avea să cadă nu înainte de doi ani și opt luni și nu după 24 de ani.

În 1993, la patru ani după ce i se adevărase previziunea, Gott a scris un articol cu titlul „Implicații ale principiului copernican asupra perspectivelor viitoare”. Cum și-a aplicat principiul la întreaga durată a speciei umane, de-atunci se vorbește despre *argumentul Judecății de apoi*. De data asta, calculul împarte durata omenirii în 40 de părți, așa încât să obțină probabilitate de 95%. Presupunând că *Homo sapiens* există de 200.000 de ani, potrivit estimărilor curente, se poate prevedea că extincția lui (a noastră) trebuie să survină între prima și ultima 39-ime, adică între 5.128 și 7.800 000 de ani. În articol, Gott comentează:



Numerele acestea sunt interesante pentru că ne atribuie o longevitate comparabilă cu a altor specii. Previziunea asupra duratei globale a speciei umane e destul de asemănătoare cu aceea a altor specii dispărute. *Homo erectus*, unul dintre strămoșii noștri, a durat circa un milion și jumătate de ani. Neanderthal a dispărut în circa 300.000 de ani. Iar la mamifere durata medie de viață a unei specii este de două milioane de ani.

Argumentul Judecății de apoi pare deci să furnizeze previziuni destul de corecte despre evenimente cât se poate de diferite, de la dărâmarea zidului Berlinului la extincția speciei umane, prin intermediul unor calcule simple, bazate pe informații minimale. S-a discutat mult despre chestiune, mai ales printre filozofii științei, dar pare prea frumos ca să fie adevărat. Și, într-adevăr, alte calcule, la fel de simple, arată că nu e adevărat.

Să presupunem, de exemplu, că Gott s-ar fi dus la Berlin în 1967, la șase ani de la ridicarea zidului: atunci raționamentul său ar fi prezis, cu probabilitate de 50%, că ar urma să cadă peste minimum 2 și maximum 18 ani. Dacă însă Gott ar fi ajuns la Berlin în 1985, la 24 de ani de la ridicarea zidului, previziunea ar fi fost 8–72. Prima estimare e greșită prin lipsă, pentru că zidul a durat mai mult, a doua e greșită prin exces, pentru că a căzut înainte.

În realitate, argumentul Judecății de apoi nu face altceva decât să prezică viață scurtă tinerilor, viață medie adulților și viață lungă bătrânilor, greșind în ambele cazuri extreme, pentru că tinerii tind să îmbătrânească, iar bătrânii tind să moară: altfel spus, punctele lor de observație sunt privilegiate și nu li se poate aplica principiul copernican.

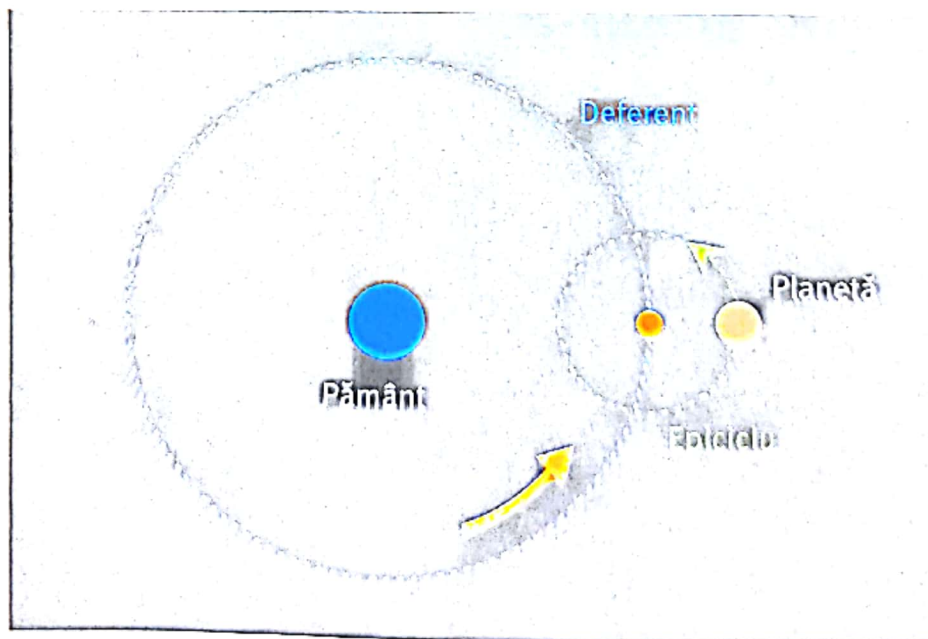
În plus, cu cât cerem o probabilitate mai mare, cu atât mai mult se lungește intervalul de estimare a momentului morții, tinzând la zero într-o direcție și la infinit în cealaltă. Ceea ce înseamnă doar a prevedea că se va muri mai devreme sau mai târziu, previziune pentru care nu era nevoie de teoria probabilităților.

ASTRONOMIE

RESPECTUOS OMAGIU EPICICLULUI

Sistemul ptolemeic

În liceu, elevilor li se predă o gogomănie științifică.* Anume, ideea că sistemul geocentric al lui Ptolemeu, considerat ortodoxia astronomică din Antichitate și până la Renaștere, ar propune de fapt o reprezentare anacronică a sistemului solar în care planetele se rotesc în jurul Pământului pe orbite complicate, derivate din suprapunerea a două mișcări: corpul ceresc se rotește pe un mic cerc, numit *epiciclu*, „supracerc“, al

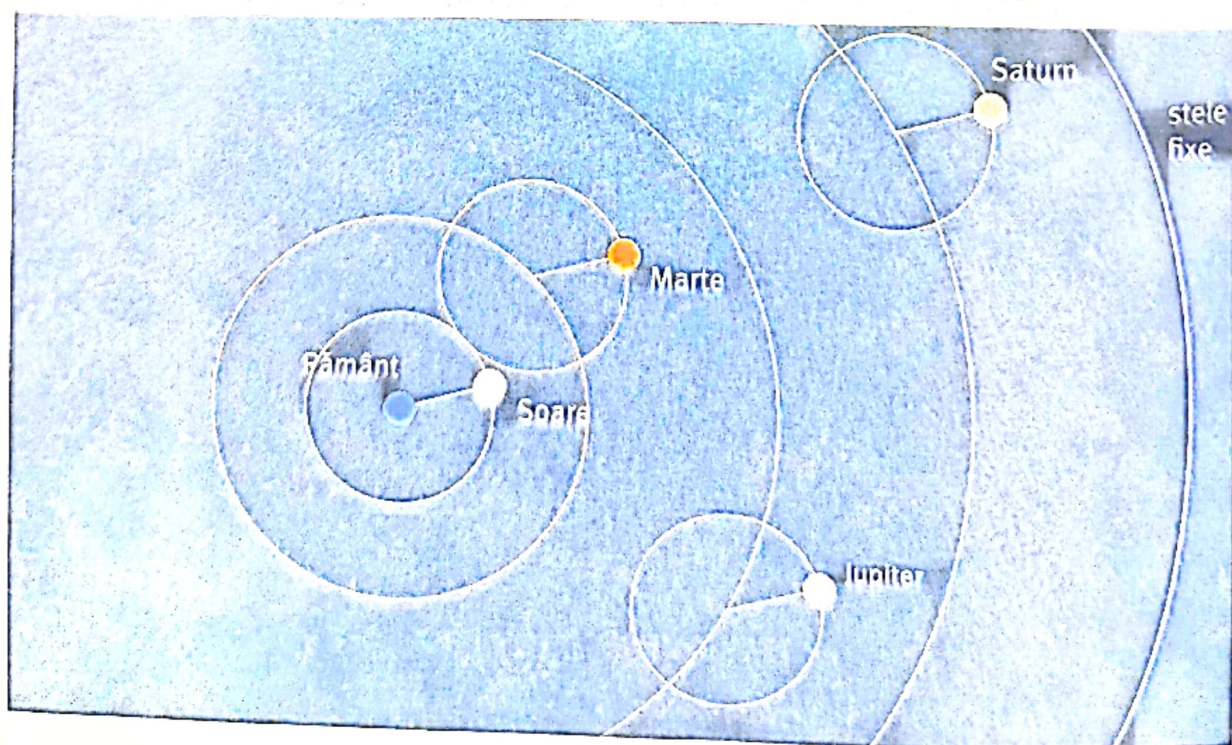


* E vorba, evident, despre liceele din Italia (n. tr.).

căruia centru, la rândul lui, se rotește pe un cerc mare, numit *deferent*, „suportul“.

Dar e chiar atât de anacronică această reprezentare? În primul rând, fusese introdusă de Apolloniu în secolul III î.e.n., pentru a ține cont de faptul că planetele își inversează periodic direcția mișcării, și chiar lămură destul de bine acest fenomen. În plus, azi putem descrie matematic foarte simplu această reprezentare, plasând un reper cartezian cu originea în centrul Pământului și observând că, dacă razele R și r ale deferentului, respectiv epiciclului, formează unghiurile α și β cu axa Ox , atunci coordonatele planetei sunt $x = R \cos \alpha + r \sin \beta$, $y = R \sin \alpha + r \cos \beta$.

Faptul că adunarea e comutativă sugerează că, dacă vrem, putem schimba între ele deferentul și epiciclu: în loc să ne imaginăm planeta rotindu-se pe epiciclu al cărui centru se rotește în jurul Pământului, ne putem imagina planeta rotindu-se pe deferent, al cărui centru se rotește în jurul Pământului pe epiciclu. Copernic a observat că, dacă facem această interschimbare pentru oricare dintre planetele exterioare cunoscute la acea vreme (Marte, Jupiter și Saturn), raza r are





întotdeauna, ca prin miracol, direcția Pământ–Soare (adică rămâne mereu paralelă cu axa Pământ–Soare): ceea ce înseamnă că, după o rescalare potrivită, al doilea termen din ecuațiile de mai sus poate deveni același pentru toate cele trei planete exterioare.

Pentru planetele interioare (Mercur și Venus) nu era nevoie de nici o inversare, pentru că, în mod și mai miraculos, deja raza R a deferentului e mereu paralelă cu axa Pământ–Soare: în acest caz, o rescalare potrivită egalează primul termen din ecuațiile de mai sus pentru cele două planete interioare. Așadar, în ambele cazuri, ecuațiile diferitelor planete conțineau la final termeni constanți care descriau orbita Soarelui în jurul Pământului.

Sistemul astfel obținut, în care planetele se rotesc în jurul Soarelui și Soarele se rotește în jurul Pământului, fusese deja propus de Apollonius și adoptat ulterior de Tycho Brahe ca soluție de compromis. Copernic însă a mai făcut un pas înainte: cum coordonatele Pământului erau egale cu zero în acest sistem, în timp ce toate coordonatele planetelor conțineau un

termen fix în raport cu coordonatele Soarelui, scăzând acești termeni din respectivele ecuații se inversa mișcarea Soarelui în jurul Pământului, obținând mișcarea opusă, a Soarelui în jurul Pământului, iar ecuațiile planetelor se simplificau, rămânând cu un singur termen.

Sistemul heliocentric astfel obținut, în care planetele și Pământul se rotesc în jurul Soarelui fix, fusese deja propus de Aristarh¹, tot în secolul III î.e.n., ca alternativă la sistemul lui Apollonius. Ca să țină seama de complexitatea mișcării planetelor, Copernic a fost însă constrâns să reintroducă epiciclurile, în număr variabil pentru fiecare planetă, obținând în fiecare caz o reprezentare a coordonatelor ca sumă finită de sinusuri și cosinusuri.

Giovanni Schiaparelli a fost primul care a observat, într-o conferință despre „Sferele omocentrice ale lui Eudoxus, Callippos și Aristotel” (1874), că:

Acea mare mulțime de sfere, pe nedrept desconsiderată de cine nu-i înțelegea funcția, a părut atât de vrednică de râs și milă epocii noastre care, fără s-o știe, folosește în teoriile planetare zeci și sute de epicicluri ascunse sub numele de termeni periodici ai seriilor infinite.

Schiaparelli făcea aluzie la seriile trigonometrice ale lui Fourier, cu care, e bine-știut, se pot reprezenta practic orice fel de funcții. În particular, se pot obține cu ele și orbitele eliptice ale lui Kepler: ironia face ca, pentru acestea, să fie de ajuns un deferent și un singur epiciclu, la fel ca în clasică teorie ptolemeică! Mai precis, o elipsă de semiaxă mare a și semiaxă mică b se obține punând $R = (a + b)/2$, $r = (a - b)/2$ și $\alpha = -\beta$, de unde se vede că nimic nu e nou sub Soare în astronomie.

1. Vezi secțiunea „Scrișul”.

TRAS DE FUNIE COSMIC

Mișcarea Lunii

Din punctul de vedere al Soarelui, planetele se mișcă pe orbite aproape circulare. Din punctul de vedere al Pământului, în schimb, planetele se mișcă pe orbite în formă de rozetă, obținute prin combinarea orbitelor lor aproape circulare în jurul Soarelui cu orbita (aparent) aproape circulară a Soarelui în jurul Pământului.

Din punctul de vedere al fiecărei planete, la fel, sateliții săi se mișcă pe orbite cvasicirculare. În schimb, din punctul de vedere al Soarelui, sateliții se mișcă pe orbite în rozetă, obținute prin combinarea orbitelor lor cvasicirculare în jurul respectivei planete cu orbitele cvasicirculare ale planetelor în jurul Soarelui.

Numărul și mărimile petalelor rozetelor descrise de diferite planete văzute de pe Pământ, ori de diferiți sateliți ai planetelor văzuți de pe Soare, depind de corpurile respective. Ca să înțelegem ce formă are orbita Lunii văzută de pe Soare, de exemplu, trebuie să specificăm datele problemei: anume, în baza legii gravitației a lui Newton¹, masele și distanțele dintre Lună, Pământ și Soare.

Luna se află la 300.000 de kilometri de Pământ și la circa 150 de milioane de kilometri de Soare, un raport de aproximativ 1/400. Cum forța gravitațională a unui corp e invers proporțională cu pătratul distanței, dar proporțională cu masa, Luna ar suferi aceeași atracție și din partea Soarelui, și din partea Pământului dacă acesta din urmă ar avea masa de 160.000 de ori mai mică decât Soarele.

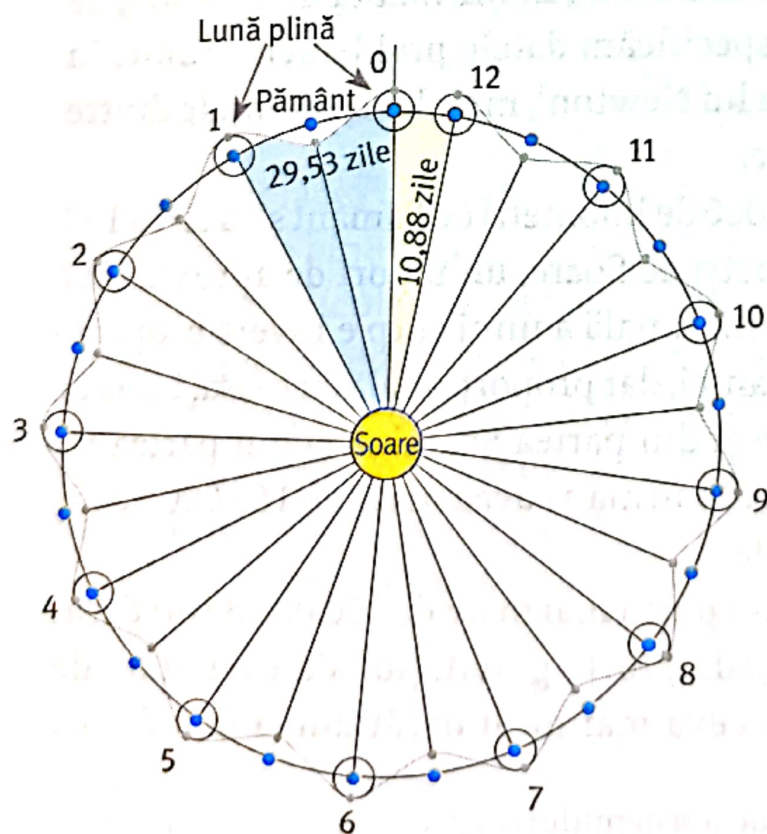
Masa Soarelui e însă puțin mai mare de 320.000 de ori decât cea a Pământului: așadar, forța gravitațională exercitată de Soare asupra Lunii e ceva mai mult decât dublă față de cea

1. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar“.

exercitată de Pământ, prevalând asupra ei. Altfel spus, pare că Luna se comportă mai mult ca planetă a Soarelui decât ca satelit al Pământului, din moment ce atracția sa către Soare variază lunar între un maximum, în perioada de Lună plină, când se mărește cu 50% prin adunare cu cea a Pământului, și un minimum, în perioadele de Lună nouă, când scade cu 50%, prin scăderea atracției Pământului.

Din punctul de vedere al Soarelui, orbita Lunii este decvasicirculară și seamănă cu un poligon cu treisprezece laturi ușor curbate, corespunzătoare lunilor lunare, și treisprezece vârfuri, corespunzând lunilor noi. În realitate, orbita nu se închide, pentru că luna lunară nu divide exact anul solar. E însă convexă și, în particular, fără petale, pentru că forța e proporțională cu accelerația, care e derivata a doua a razei: forța fiind întotdeauna îndreptată către Soare, derivata a doua e mereu pozitivă, iar curba e convexă.

Chiar dacă în manieră mai puțin pronunțată, orbita Pământului are aceeași formă. Raportul distanțelor de la Pământ



Anul solar de 365,24 zile
este egal cu aproximativ
12,37 luni lunare
de 29,35 zile.

la Lună și la Soare e tot de circa 1 la 400, dar masa Soarelui e de circa 27 de milioane de ori mai mare decât a Lunii, așa că forța gravitațională pe care o exercită Luna asupra Pământului e de circa 80 de ori mai mică decât cea exercitată de Soare, iar perturbația asupra orbitei Pământului e minimă.

În plus, deoarece Luna și Soarele își schimbă poziția față de Pământ o dată la cincisprezece zile, orbitele lor se împletesc. În particular, vârfurile orbitei Lunii sunt aliniate cu mijloacele laturilor orbitei Pământului, pentru că în perioadele de lună nouă atracția globală e minimă asupra Lunii și maximă asupra Pământului, și viceversa.

Scriitorul de science-fiction Isaac Asimov a analizat acest „comportament lunatic” într-un articol din 1963¹, propunând ca, pe baza acestui „tras de funie” dintre Lună și Pământ, să le considerăm nu drept satelit al Pământului, respectiv planetă solară, ci o „dublă planetă” solară. E o situație unică în sistemul solar, deoarece, pentru nici un alt satelit, forța gravitațională exercitată de Soare nu e mai mare decât cea exercitată de planeta satelitului. Dar asta nu înseamnă că Luna orbitează Soarele mai mult decât orbitează Pământul.

Într-adevăr, pe de o parte, Pământul exercită asupra Lunii o forță gravitațională egală cu jumătate din cea a Soarelui: perturbă deci orbita satelitului, dar, dacă ar dispărea, Luna ar continua să orbiteze Soarele aproape la fel. Pe de altă parte însă, Soarele exercită practic aceeași forță gravitațională asupra Lunii și asupra Pământului: ține deci laolaltă planeta și satelitul, dar, dacă ar dispărea, Luna ar continua să orbiteze Pământul mai mult sau mai puțin în același fel. Astfel că Luna rămâne un satelit al Pământului, oricât de neobișnuit ar fi, și nu o planetă a Soarelui.

1. „Just mooning around”, *Magazine of Fantasy and Science Fiction*, 1963.

BIG BANG-UL LUI GALILEI

Prima cosmologie

Orice elev de liceu cunoaște *principiul inerției*: „un corp își păstrează starea de repaus ori de mișcare *rectilinie* uniformă atâta vreme cât nu intervine nici o forță exterioară care să i-o modifice”, și știe că e una dintre marile descoperiri ale lui Galilei. Păcat că n-o știa și el, care nu doar că n-a enunțat niciodată acest principiu, dar, dacă l-ar fi enunțat, ar fi sunat în felul următor: „un corp își păstrează starea de repaus ori de mișcare *circulară* uniformă atâta vreme cât nu intervine nici o forță exterioară care să i-o modifice”, adăugând: „un corp nu păstrează starea de mișcare *rectilinie*, care se modifică spontan într-o stare de mișcare *circulară* uniformă”.

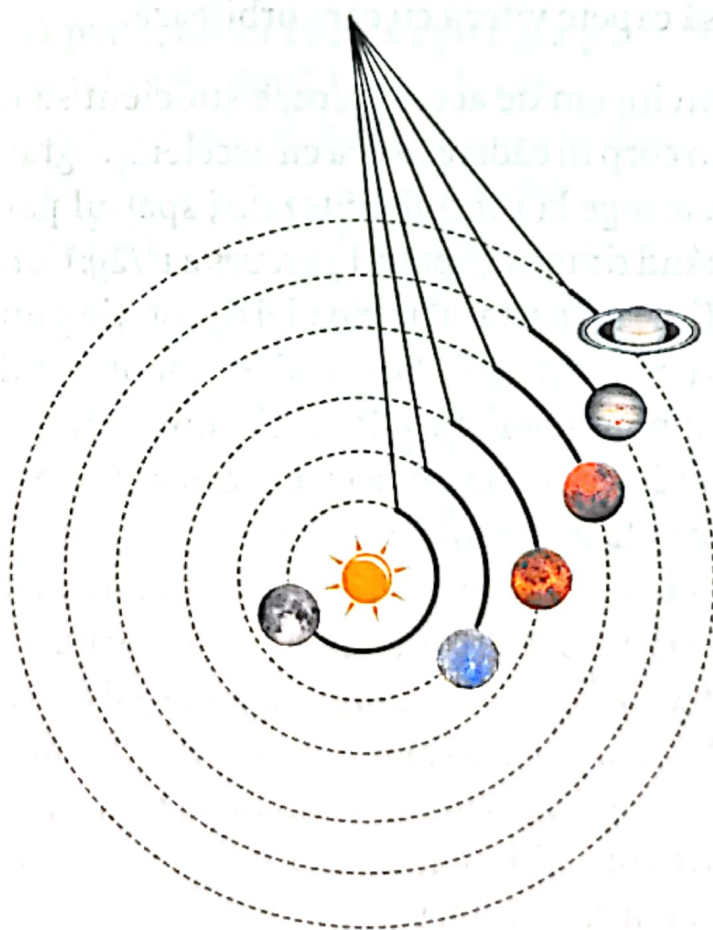
Dovadă, acest fragment din *Dialog despre cele două sisteme principale ale lumii* (1632):

De aceea trag concluzia că numai mișcarea circulară se poate potrivi în mod natural corpurilor naturale care formează universul și care sunt constituite într-o dispoziție perfectă, iar tot ce se poate spune despre mișcarea în linie dreaptă este că natura a hărăzit-o unor corpuri și părților din acestea, atunci când se găsesc în afara locului lor, constituite într-o dispoziție nepotrivită și deci nevoite să revină la starea lor naturală pe calea cea mai scurtă. Din aceasta eu cred că se poate trage în mod foarte rațional concluzia că, pentru menținerea ordinii perfecte între diferitele părți ale lumii, trebuie să spunem că părțile mobile sunt mobile numai circular, iar dacă există unele care nu se mișcă circular, trebuie în mod necesar să fie imobile, neexistând decât starea de repaus și mișcarea circulară, capabilă de a păstra ordinea.*

* Vezi p. 47 în traducerea de la Editura Științifică, București, 1962 (n. tr.).

Nu-i de mirare că, pornind cu aceste premise, Galilei și-a pus întrebarea ultimă a propriei cosmologii. Și că a încercat, pe baza unui mit obscur pe care-l atribuie lui Platon, în *Timaios*, să identifice punctul de origine comun al tuturor mișcărilor planete, un fel de analog *ante litteram* al orizontului big bang-ului nostru. Iată cum e enunțată problema în același dialog:

Să ne închipuim că printre hotărârile divinului arhitect s-ar fi aflat și intenția de a crea în lume globurile pe care le vedem învârtindu-se și că, stabilind centrul acestor rotații, a așezat acolo Soarele nemișcat, și că apoi a creat toate aceste globuri într-un același loc și de acolo le-a imprimat tendința de a se mișca, coborând spre centru până la dobândirea treptelor de viteză pe care mintea divină a socotit că, odată dobândite, acestea le vor menține, rotindu-se fiecare pe cercul său.¹



1. Vezi p. 44–45, *loc. cit.*

Este vorba deci de a calcula, pentru fiecare planetă în parte, distanța de la Soare de la care un corp în cădere liberă ajunge pe orbita planetei cu o viteză egală cu cea orbitală, și de a vedea dacă distanțele diferitelor planete coincid. Chestiune deloc absurdă, pentru că, efectiv, viteza orbitală a unei planete e cu atât mai mare cu cât e planeta mai apropiată de Soare, și deci cu cât cade și accelerează mai mult.

În a patra zi din *Discursuri și demonstrații matematice în jurul a două noi științe* (1638), Galilei afirmă că „a făcut odată calculul și l-a găsit foarte potrivit pentru a răspunde comentariilor“. Dar într-o scrisoare către Richard Bentley, din 1692, Newton demonstrează că se înșela:

Nu există un loc comun din care, dacă s-ar lăsa să cadă toate planetele, iar ele ar cădea cu gravitație uniformă și egală (cum presupune Galilei), la ajungerea pe respectivele orbite ele să capete viteza cu care orbitează.

Ca să ne convingem de acest lucru, e suficient să ne aducem aminte că un corp în cădere liberă cu accelerație gravitațională uniformă g , atinge la timpul t viteza gt , spațiul parcurs fiind $gt^2/2$: eliminând timpul t , spațiul parcurs e $v^2/2g$. Conform legii a treia a lui Kepler¹, pătratul perioadei de rotație a unei planete în orbită circulară în jurul Soarelui e proporțional cu cubul razei r : iar cum perioada e egală cu circumferința orbitei, $2\pi r$, împărțită la viteză, pătratul acesteia din urmă e egal cu k/r pentru o anumită constantă k .

Așadar, o planetă care pleacă de la o distanță $r + k/2g$ ajunge în cădere liberă pe orbită cu viteza dorită oricare ar fi g . Două planete pot face acest lucru numai dacă g e egal cu k împărțit la dublul produsului razelor celor două orbite. Dar nu există nici un punct din care *trei sau mai multe* planete cu orbite diferite să poată satisface condițiile acestea, orice-ar crede nu doar Galilei, dar chiar și „divinul Arhitect“.

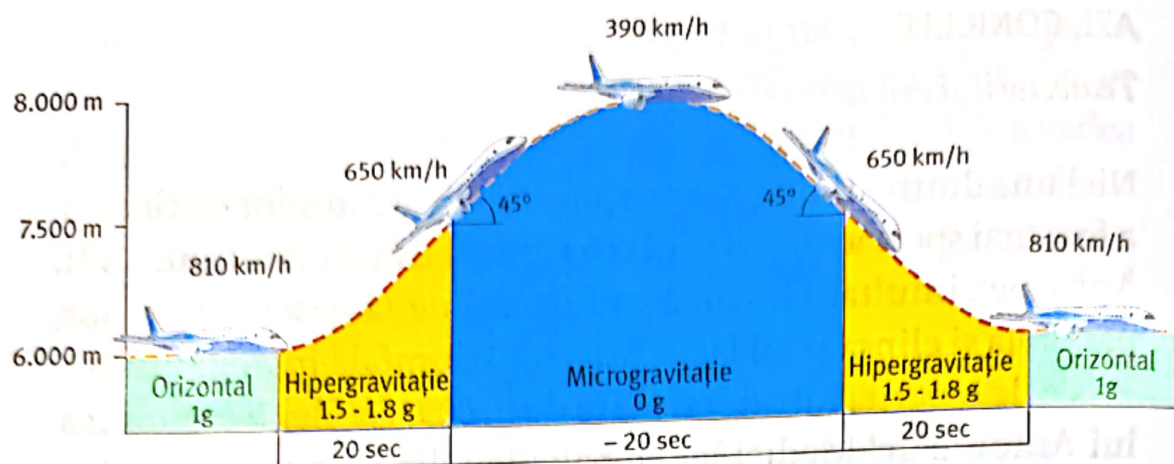
1. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar“.

Nici una dintre numeroasele aplicații ale secțiunilor conice nu a fost mai spectaculoasă decât cea din mecanica secolului XVII. Aproape simultan, la două mii de ani de la descoperirea lor, parabola și elipsa și-au făcut intrarea triumfală în noua știință.

Pe de o parte, într-o scrisoare din 1609, Galilei îi comunica lui Antonio de' Medici legile balisticii din care rezulta că traiectoria unui proiectil e *parabolică*. E vorba despre o lege aproximativă, validă doar presupunând Pământul plat și accelerația gravitațională constantă. Dar e o lege care se aplică bine lumii suficient de restrânse a experienței noastre de zi cu zi în care o vedem confirmată de nenumărate ori: de la jeturile de apă ale fântânilor, la ricoșeurile amortizate ale mingilor, la salturile delfinilor în apă.

Pe de altă parte, tot în 1609, Kepler și-a publicat în *Astronomia nova* primele sale două legi, cele care lămuresc mișcarea planetelor în jurul Soarelui. Prima dintre ele stabilește că orbita nu e circulară, cum presupunea, în primă aproximație, teoria copernicană, ci *eliptică*, având Soarele într-unul din focare.





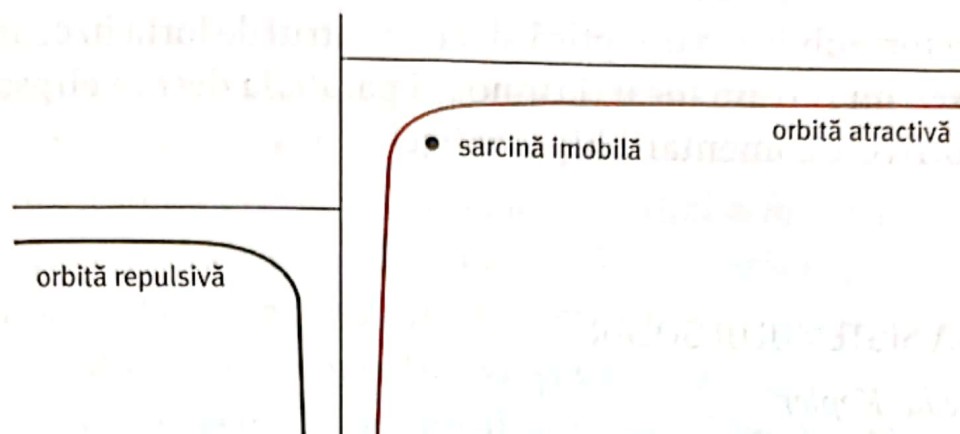
Urcându-se pe umerii acestor doi uriași, Newton a produs în 1687 marea sinteză din *Principia*. Și a descoperit că o orbită de forma unei secțiuni conice reclamă o forță gravitațională invers proporțională cu pătratul distanței.¹ Invers, o asemenea forță produce orbite de forma unei secțiuni conice: așadar, nu doar eliptice, ci și parabolice sau hiperbolice, după caz.² În particular, așa se întâmplă în balistică, în funcție de viteza imprimată unui *proiectil* de forță din momentul lansării.

O aplicație antibalistică a conicelor avem când inversăm traiectoria unui proiectil. De exemplu, când un avion în zbor stinge motoarele, el pornește pe o traiectorie eliptică (aproximativ parabolică) de cădere liberă care depinde de direcția și de viteza cu care se deplasa. Efectul acesta e folosit de Vomit Comet al NASA în antrenamentul astronauților pentru absența gravitației, situație în care se vor afla în timpul misiunilor spațiale.

Cât despre corpurile cerești, exemplul tipic de orbită eliptică este acela al unui corp de masă neglijabilă în raport cu altul de masă dominantă: o *planetă* în jurul Soarelui sau un *satelit* în jurul unei planete. Dacă se ține însă seamă de ambele mase, vedem că fiecare din corpuri se mișcă pe câte o orbită eliptică în jurul centrului de masă comun.

1. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar“.

2. Vezi secțiunea „Frivolități despre gravitație“.



Și cometele care revin periodic se mișcă pe orbite eliptice, cu atât mai alungite cu cât mai lungă le e perioada. În schimb, cele care nu revin se mișcă pe orbite aproximativ parabolice. Până acum, în sistemul nostru solar nu au fost înregistrate comete cu orbite hiperbolice, deși în teorie ele sunt permise.

Pentru a găsi orbite hiperbolice e suficient să ne uităm la mișcarea *particulelor încărcate* electric. Cum forța coulombiană e invers proporțională cu pătratul distanței, aidoma celei gravitaționale, ea va produce același tip de orbite atunci când ambele particule sunt libere și au sarcini opuse.

Dacă însă una din particule e ținută imobilă, cealaltă îndreptându-se către ea, particula în mișcare își schimbă direcția, dar nu și viteza, intrând pe o orbită hiperbolică. Dacă cele două sarcini sunt opuse, particula e atrasă și urmează o ramură de hiperbolă care trece prin spatele celeilalte particule, imobilă în focarul intern al hiperbolei. Dacă cele două sarcini sunt egale, particula e respinsă și urmează altă ramură de hiperbolă, care trece prin fața particulei care rămâne imobilă în focarul extern.

Nu numai o forță invers proporțională cu pătratul distanței, cum sunt forța gravitațională și cea electromagnetică, poate produce orbite eliptice. După cum a observat Newton în *Principia*, la fel se întâmplă cu o forță direct proporțională cu distanța. Aceasta e tipică pentru un corp legat de un resort, care se mișcă în jurul unui punct. Sau pentru un pendul care se mișcă în spațiu, nu doar într-un plan. În ambele cazuri,

traectoria obținută e eliptică, dar cu centrul de forță în centrul elipsei, nu într-un focar. Frumoasă parabolă despre elipse – i se potrivesc comentarii hiperbolice!

CHEIA SISTEMULUI SOLAR

Legile lui Kepler

În 1619, Kepler a publicat o carte bizară intitulată *Armonia lumii*, care desăvârșea programul pitagoreicilor.¹ Aceștia din urmă descoperiseră primele legi matematice ale muzicii: în particular, rapoartele numerice corespunzătoare rapoartelor armonice ale octavei și cvintei sunt, respectiv, $2/1$ și $3/2$. Iar motivul este că, pentru a face o coardă de vioară să vibreze cu o octavă mai sus, trebuie s-o împarți în jumătate, iar ca s-o faci să vibreze cu o cvintă mai sus, o împarți la două treimi.

Pitagoreicii își aplicaseră propriile teorii în astronomie; în siajul lor, Kepler considera sistemul solar drept o liră a lui Apollo cosmică, în care planetele vibrează cu sunete emise de corzi ideale care le leagă de Soare. Analizând datele astronomice pe care le avea la dispoziție, Kepler a observat că rapoartele dintre timpii de rotație ai planetelor erau legate de razele medii ale orbitelor lor printr-un raport numeric mai mult decât liniar, dar mai puțin decât pătratic: anume, timpul era egal cu raza ridicată la o putere mai mare decât 1 și mai mică decât 2.

În termeni muzicali, asta corespundea unui raport cuprins între unison și octavă, iar el a presupus că poate fi o cvintă: exponentul razei ar fi deci $3/2$. Astfel, a enunțat ceea ce azi numim *a treia lege a lui Kepler*: pătratele perioadelor de rotație a planetelor în jurul Soarelui sunt proporționale cu cuburile razelor medii ale orbitelor ($t^2 = kr^3$).

În 1666, tânărul Newton a descoperit formula accelerației în mișcarea circulară uniformă ($a = v^2/r$) și, presupunând că

1. Vezi secțiunea „Muzica irațională“.

orbitele ar fi circulare, din a treia lege a lui Kepler a dedus ușor că accelerația planetelor e invers proporțională cu pătratul razei medii a orbitei ($a = 4\pi^2/kr^2$).

Puțin după aceea, formula accelerației a fost regăsită de Huygens, care a și publicat-o în 1673 în *Ceasurile cu pendul*. Din ea, folosind legea a treia a lui Kepler, cel puțin alți trei savanți (Edmond Halley, Robert Hooke și Christopher Wren) au obținut legea inversului pătratului distanței pentru orbite circulare. Și-au pus și problema dacă legea rămâne valabilă și pentru orbite eliptice, dar, nereușind s-o rezolve, i-au propus-o în 1684 lui Newton, care a disecat din punct de vedere matematic subiectul în capodopera *Principiile matematice ale filozofiei naturale* din 1687.

Newton a demonstrat că, pentru orbite circulare, legea a treia a lui Kepler e echivalentă cu legea inversului pătratului distanței și că, pentru orbite arbitrare, legea inversului pătratului distanței e caracteristică tuturor orbitelor care pot fi descrise prin ecuații pătratice: așadar, în afară de cercuri, elipse, parabole și hiperbole.¹ În plus, legea a treia a lui Kepler forțează constanta de proporționalitate să fie aceeași pentru toate planetele: altfel spus, ne aflăm în prezența unei unice forțe de atracție solară.

Ca de aici să deducă o *lege a atracției universale*, Newton a mai avut de lucru. În primul rând, a observat că legea a treia a lui Kepler era valabilă nu doar pentru planetele din jurul Soarelui, ci și pentru sateliții lui Jupiter și Saturn: în consecință, și aceste planete generau forță de atracție, la fel ca Soarele. Cât despre Pământ, care are un singur satelit, Newton a comparat gravitația responsabilă de căderea merelor cu aceea responsabilă de menținerea pe orbită a Lunii, găsind că erau legate prin legea inversului pătratului distanței: se putea deci imagina că era vorba despre o unică forță, și ea de felul celor precedente.

1. Vezi secțiunea „Frivolități despre gravitație“.

În acest punct, Newton a putut postula existența unei forțe de atracție gravitațională universală, invers proporțională cu pătratul distanței. Mai mult, a dedus că aceeași forță trebuie să fie direct proporțională cu masele, pentru că în vid toate corpurile cad cu aceeași viteză. În fine, din expresia forței gravitaționale generate de un corp (GM/r^2), Newton a găsit în mod teoretic valoarea constantei de proporționalitate din legea a treia a lui Kepler ($k = 4\pi^2/GM$).

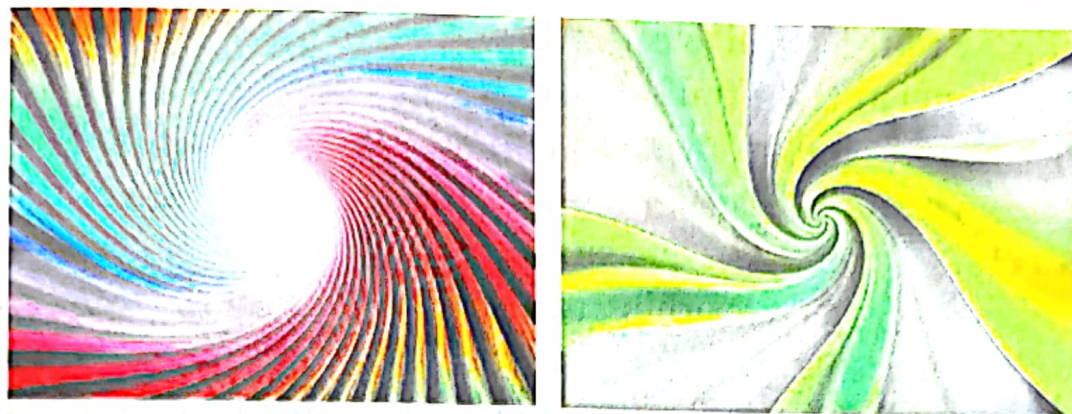
Măsurând apoi empiric constantele pentru Soare față de planete, și pentru Pământ, Jupiter și Saturn față de sateliții lor, Newton le-a putut calcula masele. Iar cu legea a treia a lui Kepler a demonstrat că, dacă Soarele s-ar roti în jurul Pământului, ar fi trebuit ca o rotație să dureze 600 de ani, nu doar unul, înmormântând pentru totdeauna o seculară polemică teologico-filozofică cu doar o simplă formulă fizico-matematică!

FRIVOLITĂȚI DESPRE GRAVITAȚIE

Forțe gravitaționale

Din multitudinea de rezultate conținute în *Principia*, cel mai cunoscut e Propoziția 11, care răspunde următoarei întrebări: „Dat un corp care se mișcă de-a lungul unei elipse, care e legea forței centripete îndreptate spre focar?” Soluția e că forța e *invers proporțională cu pătratul distanței*, iar în Propozițiile 12 și 13 Newton extinde rezultatul la hiperbolă și parabolă. Iar în corolarul imediat următor trage concluzia triumfală:

Din ultimele trei Propoziții deducem că un corp oarecare, atras în mod continuu către un centru de o forță invers proporțională cu pătratul distanței corpului respectiv față de acel centru, se va mișca de-a lungul unei secțiuni conice având unul dintre focare drept centru, și reciproc.



Exemple de spirale Cotes

Ca să spunem tot adevărul, cele trei propoziții citate demonstrează numai jumătate din ce afirmă Newton: anume „și reciproc”. După cum a observat Johann Bernoulli încă din 1710, nicăieri în *Principia* nu e de găsit și demonstrația celeilalte jumătăți: anume, că legea atracției universale produce orbite de forma unei secțiuni conice. Stranie omisiune, ținând seama că tocmai această jumătate a stat la baza discuției din 1684 de la Royal Society, pe care Edmond Halley i-a comunicat-o lui Newton, care, vrând să răspundă exact acestei întrebări, a început să redacteze *Principia*.¹

Newton știa totuși foarte bine cum să-și demonstreze corolarul, pentru că din Propoziția 41 a dedus rezultatul analog că o forță *invers proporțională cu cubul distanței* produce orbite în formă de spirală: exact acest lucru a fost determinat de Roger Cotes, îngrijitorul celei de-a doua ediții a *Principia*, care, în 1714, a definit o familie de curbe numite azi *spiralele lui Cotes*.

Invers, în Propoziția 9, Newton demonstrase deja că o orbită în spirală logaritmică e produsă de o forță de acel tip, închizând de data asta, parțial, cercul. În particular, într-o lume guvernată de o lege a atracției universale invers proporțională cu cubul distanței nu pot exista orbite închise: Soarele n-ar fi capabil să țină planetele în jurul său, acestea s-ar îndepărta la infinit, pe traiectorii de formă spirală.

1. Vezi secțiunea „Te asigur că rentează”.

Ca să fim preciși, o excepție ar exista: într-adevăr, în prezența unei forțe centrale pot fi obținute și orbite circulare. Dar ele nu pot fi stabile, pentru că Joseph Bertrand a demonstrat celebra lui *Teoremă despre mișcarea unui punct atras către un centru* (1873), potrivit căreia singura lege de proporționalitate inversă care permite orbite închise și stabile e aceea pătratică.

Dacă în cazul unei legi cubice toate orbitele tind spre infinit, asta nu se mai întâmplă în cazul unei legi liniare, corespunzătoare unei forțe *invers proporționale cu distanța*. Dimpotrivă, funcționează exact opusul, pentru că în această situație gravitația scade atât de lent, încât și energia potențială și viteza de fugă devin infinite: în particular, de îndată ce o rachetă și-ar stinge motoarele, ea ar începe imediat s-o ia înapoi, indiferent de viteză.

Dacă într-o lume cu gravitația invers proporțională cu cubul distanței, corpurile cerești ar fi condamnate la dispersie reciprocă, într-una cu gravitația invers proporțională cu distanța ele ar putea forma structuri mai mult sau mai puțin permanente. Exact acesta e tipul de gravitație pe care îl presupunem că ar exista într-o lume bidimensională, din același motiv pentru care într-o lume tridimensională ne așteptăm ca orice energie iradiată de un punct să scadă în manieră invers proporțională cu pătratul distanței.

Planiversul (1984) lui Alexander Dewdney descrie în formă romanțată, dar plauzibilă din punct de vedere științific, legile fizice, chimice și biologice care descriu o asemenea lume.¹ O lume care încă își așteaptă un Newton al ei care să-i determine forma exactă a orbitelor – clasificate deja și descrise aproximativ de John Lew și Donald Quarles: în afara celor circulare, există multe altele închise, chiar dacă instabile, datorită teoremei lui Bertrand; încă o confirmare că spațiul supraceresc* al matematicii e mult mai variat decât universul fizicii.

1. Vezi secțiunea „Povești“.

* Aluzie la *Phaidros*. Vezi 247 c, în traducerea lui G. Liiceanu, *Humanitas*, București, 1993. Termenul folosit de Odifreddi e „hiperuraniu“ (n. tr.).

Inițial, *Dialog despre cele două sisteme principale ale lumii* al lui Galilei trebuia să se cheme *Dialog despre fluxul și refluxul mărilor*, dovadă a faptului că adevăratul lui scop era subiectul din a patra zi a operei: expunerea unei noi teorii a mareelor, bazată pe mișcarea mării provocată de rotația terestră, analoagă celei a apei dintr-un lighean.

Titlul cărții a fost schimbat la ordinul dominicanului Nicolò Riccardi, zis și „Padre Mostro”, care în rolul său de teolog pontifical a condiționat *imprimatur*-ul ecleziastic de alegerea unui titlu care să nu facă referire la o teorie bazată în mod explicit pe ipoteza mișcării Pământului, contrazicând astfel poziția ptolemeică adoptată de Biserică.

Galilei credea că explicația pe care o găsisese mareelor e cel mai bun argument pentru confirmarea sistemului copernican, dar se înșela. În abordarea sa, neglijase factorul esențial al mareelor, explicat cincizeci de ani mai târziu de Newton în *Principia*: atracția Lunii, care acționează asupra apelor terestre din dreptul ei, ridicându-le cu o forță invers proporțională cu cubul distanței dintre Lună și Pământ.

Într-adevăr, conform legii atracției universale, Luna exercită o atracție invers proporțională cu pătratul distanței r față de Pământ asupra punctelor din dreptul său, dar invers proporțională cu $r+d$ asupra punctelor de pe cealaltă parte (față de ea) a Pământului, unde d e diametrul Pământului. Forța mareei e diferența dintre aceste două forțe: ținând cont de faptul că raportul d/r dintre diametrul Pământului și distanța până la Lună e mic, pătratul său e neglijabil, astfel că se ajunge la o expresie a forței mareei proporțională cu $2d/r^3$.

În *Fluxuri și refluxuri*¹, carte care reia titlul original al *Dialogului*, Lucio Russo identifică în Paolo Serpi și Kepler precursorii

1. *Flussi e reflussi*, Mondadori, Roma, 2003.

din secolul XVII ai teoriilor lui Galilei și Newton. Observă însă că, deja în secolul I î.e.n., Seleucos din Babilon propusese o teorie completă în care apăreau ambii factori: atracția lunară, care explică ciclurile mareelor, și mișcarea terestră (în jurul centrului de masă al sistemului Pământ–Lună), care explică ridicarea apelor nu numai pe partea dinspre Lună, dar și la antipozii. Așadar, contribuția lui Newton nu a fost *descoperirea* teoriei mareelor, cum nici a legilor lui Kepler, ci *demonstrarea lor* plecând de la teoria mecanicii gravitaționale.¹

Russo notează că observarea unei legături între maree și pozițiile Lunii și Soarelui le-a sugerat celor din Antichitate ideea că ambele astre produceau atracție gravitațională, cu tot respectul pentru legenda cu mărul lui Newton. De altfel, diferențele vizibile dintre mareele oceanelor Indian și Atlantic i-au permis lui Hiparh să deducă existența unui continent care le separă, cu un mileniu și jumătate înainte să-l descopere Columb!

Cât despre modernitate, deja în *Considerații ulterioare asupra cutremurelor de Pământ percepute de un anumit timp* (1756), Kant s-a folosit de legile lui Newton pentru a stigmatiza credințele astrologice despre influența astrelor asupra întâmplărilor terestre:

De multă vreme deja nu mai suspectăm vreun influx al planetelor atunci când are loc un eveniment pe suprafața Pământului. Inventarul marilor responsabilități pe care dragii noștri înaintași, domnii astrologi, le puneau în seama acestor corpuri cerești a fost arhivat între fantasma-goriile mucegăite, alături de vechile basme cu zâne. În schimb, de când știința s-a curățat de aceste stupidități, un Newton a descoperit, și confirmat empiric, o forță reală pe care și planetele cele mai îndepărtate o exercită reciproc și asupra Pământului nostru.

1. Vezi secțiunea „Cheia sistemului solar“.

În ce privește încercarea unor contemporani de a pune în seama forțelor mareice ale planetelor măcar vina marilor cutremure marine, cum a fost cel de la Lisabona din 1775, Kant observa cum „capacitatea de a produce schimbări pe Pământ prin intermediul forței gravitaționale descrește în manieră invers proporțională cu cubul distanței”, deci influența planetelor e neglijabilă față de aceea a Soarelui. De exemplu, Jupiter e cam de 5 ori mai departe de Soare decât Pământul, iar masa lui e de circa 1.040 de ori mai mică decât a Soarelui: așadar, forța mareică a lui Jupiter este de $125 \times 1.040 = 130.000$ de ori mai mică decât a Soarelui, cum corect calculase Kant.

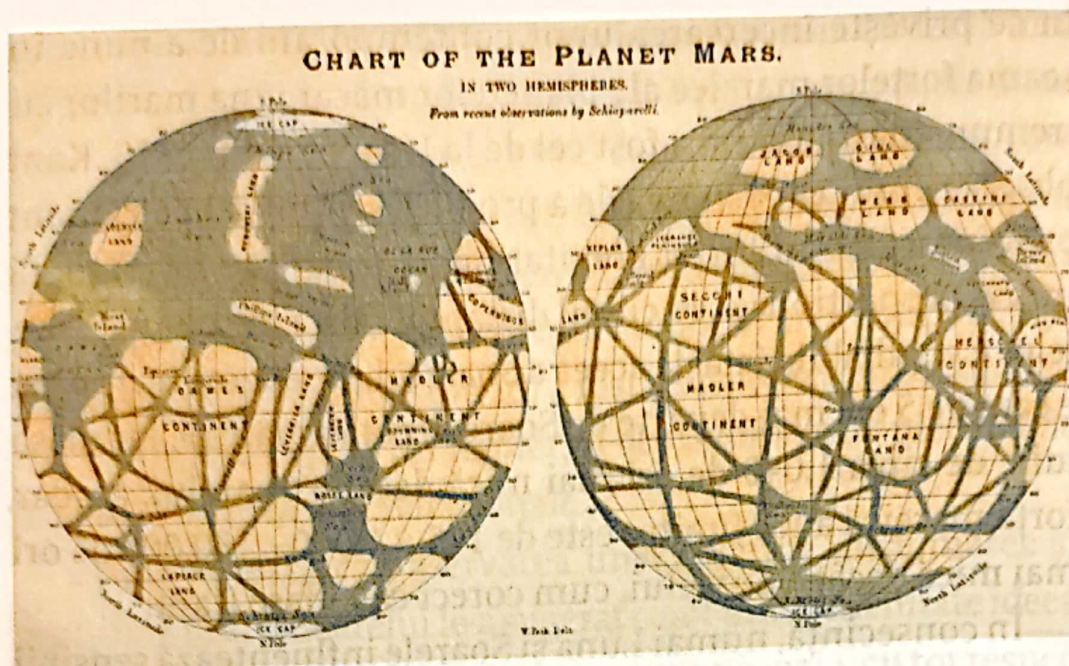
În consecință, numai Luna și Soarele influențează sensibil mareele terestre, iar un calcul analog celui al lui Kant arată că influența Lunii e de circa două ori mai mare decât a Soarelui. Datorită unei influențe analoage a Lunii și Soarelui, axa Pământului înregistrează o mișcare conică la fiecare 26.000 de ani față de perpendiculara pe ecliptică, dovedită de lenta precesie a echinocțiilor descoperită de Hiparh, explicată de Copernic și calculată de Newton.¹

PROIECTUL LUI VON BRAUN

De la Pământ la Marte

Pe 20 iulie 1969 astronauții lui Apollo 11 au revenit pe Pământ, eroii primei aselenizări din istorie. Pe 4 august, după nici două săptămâni, Wernher von Braun a prezentat unei comisii a NASA prezidate de vicepreședintele SUA, Spiro Agnew, un plan de viitor. Urma ca în 1975 să fie gata o Space Shuttle și o stație orbitală în jurul Pământului, acestea permițând construirea în spațiu a unor astronave și module pentru o misiune pe Marte. În 1981, omul ar fi urmat să pună piciorul pe Planeta

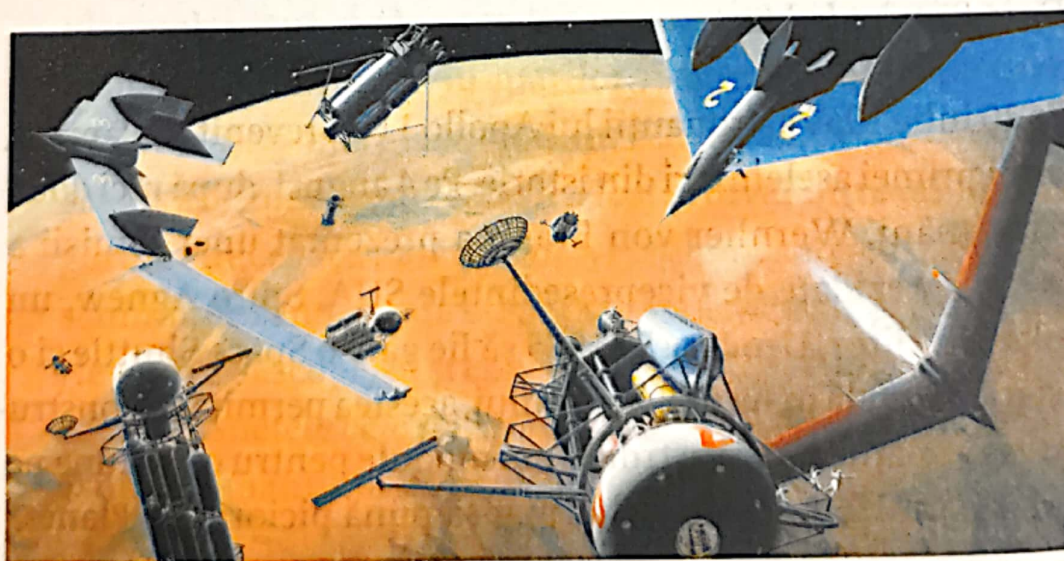
1. Vezi secțiunea „Douăzeci și trei de grade și jumătate“.



Canalele de pe Marte, în viziunea lui Schiaparelli (1891)

Roșie, alte trei misiuni fiind programate până în 1988, fiecare cu doisprezece astronauți și două astronave. Din păcate, președintele Richard Nixon și Congresul nu au aprobat planul, iar pe Marte încă n-a călcat picior de om.

În 1972, la încheierea programului Apollo, Von Braun a demisionat de la NASA, dezamăgit de a nu-și fi putut realiza adevăratul vis al vieții sale, vis care mergea mult dincolo de misiunile lunare. Cu cincizeci de ani în urmă, fusese entuziasmat de roma-



Imagine din Proiectul Marte al lui von Braun

nul *Două planete* (1897) al fizicianului-matematician Kurd Lasswitz, un „Verne german“ care, inspirat de astronomii Giovanni Schiaparelli și Percival Lowell, prezenta canalele marțiene drept opera unor ființe inteligente.

Iar cu douăzeci de ani în urmă, tânăr fiind, Von Braun publicase raportul tehnic *Proiectul Marte* (1952), cu toate calculele necesare pentru efectuarea unei misiuni pe Planeta Roșie până în 1965. De fapt, raportul data din 1949 și era un appendice științific la omonimul roman *Proiectul Marte* care fusese refuzat de nu mai puțin de optsprezece edituri, nefiind tipărit decât după aproape șaiszeci de ani.¹ În schimb, raportul a fost publicat cu încuviințarea Departamentului Apărării american, care a considerat proiectul atât de futurist și de irealizabil, încât secretizarea ar fi fost inutilă.

La momentul acela, Von Braun avea planuri mult mai mari decât s-a mărginit să propună în 1969. Ideea sa era să trimită o flotă de zece astronave: șapte de transport, cu un total de șaptezeci de pasageri, și trei de provizii, cu tot materialul necesar misiunii, programată să dureze trei ani, jumătate din care petrecuți pe planetă.

Astronavele urmau să fie asamblate pe o stație care orbita Pământul, piesele fiind transportate pe stație cu rachete re folosibile, ca acelea construite azi de Space X a lui Elon Musk. Printr-o uluitoare coincidență, marțienii din roman erau guvernați de un lider planetar pe nume Elon!

Coborârea pe Marte trebuia să se facă în urma unui zbor planat, dar misiunea Mariner 7 a descoperit în 1965 că densitatea atmosferei planetei e numai o zecime din cât se credea pe vremea scrierii romanului și a raportului Von Braun, depășite deci din acest punct de vedere. Cum depășite sunt și pentru că n-au luat în seamă riscurile posibilelor radiații din spațiu, descoperite abia în 1958 de James van Allen cu misiunile Explorer,

1. *Project Mars: A Technical Tale*, Apogee Books, 2006.

chiar dacă Von Braun era deja conștient de posibilele efecte negative ale zborurilor spațiale de lungă durată asupra omului.

Cât despre rachete, funcționarea lor se baza pe principiul acțiunii și reacțiunii: de exemplu, dacă arunci într-o direcție ancora unei bărci nelegate la mal, barca se mișcă în direcția opusă. Primul care a aplicat acest principiu în teoria rachetelor a fost inginerul rus Konstantin Tîolkovski, inspirându-se din romanele lui Jules Verne.¹ În data de 10 mai 1897, el a obținut *ecuația rachetei*, pe care a publicat-o mai târziu în cartea *Explorarea spațiului cosmic cu mașini cu reacție* (1903).

În particular, folosind legea de mișcare a lui Newton² a putut stabili că, dacă viteza de expulzare a gazelor de eșapament e constantă, atunci cantitatea de carburant necesară rachetei crește exponențial față de viteza dorită a rachetei, ceea ce explică urieșenia rezervoarelor care înconjoară racheta la momentul lansării.

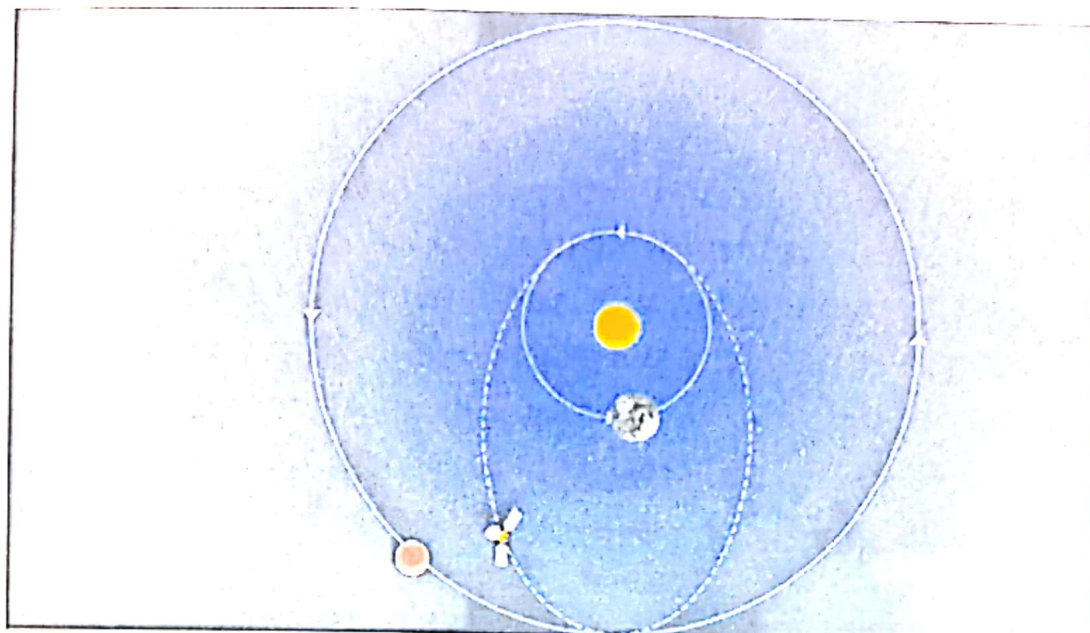
Cât privește orbita, o primă aproximație a fost propusă în cartea *Posibilitatea de a ajunge la corpurile cerești* (1925) a inginerului german Walter Hohmann, care, asemenea lui Von Braun, fusese influențat de romanul lui Lasswitz. În teorie, ideea era de a conecta două orbite circulare concentrice cu o elipsă tangentă exterior la orbita internă și interior la cea externă.

În practică, lucrurile se complică, pentru că orbitele nu sunt perfect circulare și concentrice, mai ales în cazul lui Marte. În plus, nu se trece direct de pe orbita Pământului pe cea a lui Marte, ci de pe o orbită de parcare în jurul Pământului la una în jurul lui Marte. În fine, lansarea trebuie să survină în timpul unei ferestre temporale care se deschide numai o dată la circa 26 de luni, și garantează astronavei că se va găsi în preajma lui Marte la finele călătoriei.

Ca un roman și un raport dinaintea erei spațiale să aibă azi un aer vetust stă în ordinea firească a lucrurilor. E însă uimitor

1. Vezi secțiunea „Calcululele Columbiei“.

2. Vezi secțiunea „Puterea formulelor“.



Orbita lui Hohmann

cât de corect a reușit Von Braun să anticipeze detaliile care privesc rachetele și zborurile unei misiuni mult mai ambițioase decât orice s-a realizat până acum.

FORMULE ECUMENICE

Entropia unei găuri negre

Cea mai celebră formulă din matematică i se datorează lui Euler¹, și pune în legătură cele cinci constante fundamentale din aritmetică și din analiza reală și complexă. Anume, întregii 0 și 1, numerele reale e și π , și unitatea imaginară i , adică rădăcina pătrată a lui -1 . Formula stabilește că $e^{i\pi} + 1 = 0$, și e doar un caz particular al uneia mult mai generale care unește trei funcții fundamentale din analiză: exponențiala, sinusul și cosinusul.

În fizică, analoaga formulei lui Euler ar fi una care leagă între ele constantele fundamentale din diferitele teorii standard: gravitația, termodinamica, relativitatea și mecanica

1. Vezi secțiunea „Un orb vizionar“.

cuantică. Surprinzător, dar o asemenea formulă chiar există – și furnizează entropia unei găuri negre.

Entropia măsoară dezordinea stării unui sistem: de unde notația S pentru ea, inițiala cuvântului „stare”. Ideea că și găurile negre posedă entropie, și anume proporțională cu aria orizontului evenimentelor, a fost propusă de Jakob Bekenstein în articolul „Găurile negre și legea a doua” (1972): o intuiție interesantă, ținând cont că în termodinamica clasică entropia e proporțională nu cu aria, ci cu volumul regiunilor considerate.

Entropia se exprimă în termenii *constantei lui Boltzmann* k . Aceasta apare în faimoasa formulă $S = k \log W$, înscrisă pe piatra funerară a lui Boltzmann, la Viena. În realitate, și formula, și respectiva constantă au fost introduse de Max Planck în la fel de faimosul său memoriu din 14 decembrie 1900 despre corpul negru, același în care apare și constanta lui Planck h pentru energie!

Modul cel mai simplu de a înțelege rolul jucat de constanta lui Boltzmann în termodinamică e de a apela la *legea gazelor ideale*. Aceasta afirmă că, într-un gaz, produsul dintre presiune și volum e proporțional cu temperatura. Iar constanta de proporționalitate e dată de produsul dintre constanta k a lui Boltzmann și numărul N de molecule din gaz: $PV = NkT$.

Constanta lui Boltzmann are aceeași dimensiune ca entropia, care este o energie împărțită la o temperatură, deci restul unei formule pentru entropie trebuie să fie un număr pur. În particular, dacă entropia e proporțională cu aria unei găuri negre, atunci aceasta din urmă trebuie împărțită la o arie de referință. În mecanica cuantică, e naturală folosirea *ariei Planck*, corespunzând unui pătrat de latură egală cu lungimea l a lui Planck.

Aceasta din urmă indică dimensiunea la care structura spațiului-timp începe să simtă efectele cuantice și capătă o natură „spumoasă”. Nu e de mirare că în definiția sa¹ apar constante care provin și din relativitatea generală, și din mecanica cuantică: viteza luminii c , constanta gravitațională G și constanta redusă

1. Vezi secțiunea „Fizicienii dau numere”.

a lui Planck $\hbar$, egală cu $\hbar/2\pi$. Mai precis, lungimea Planck l este egală cu rădăcina pătrată din $\hbar G/2\pi c^3$.

În esență, propunerea lui Bekenstein se reducea la conjectura că entropia unei găuri negre având un orizont al evenimentelor de arie A este proporțională cu $KA/4$. În articolul „Crearea de particule de către găurile negre” (1975), Stephen Hawking a demonstrat validitatea conjecturii și a arătat că valoarea constantei de proporționalitate este pur și simplu $1/4$. Așadar, formula completă este: $SBH = KA/4$, unde BH înseamnă și Black Hole, și Bekenstein-Hawking.

Formula entropiei unei găuri negre conține deci constantele fundamentale ale termodinamicii, ale relativității speciale și generale, și ale mecanicii cuantice. Ba chiar, în bună măsură, pe π . Explicit, entropia unei găuri negre cu aria orizontului evenimentelor A este egală cu $kA\pi c^3/2\hbar G$.

E greu să faci mai mult de-atât! Doar să reușești să inserezi în vreo formulă similară și unitatea imaginară i . Ea intervine însă efectiv, alături de constanta $\hbar$, în ecuația de undă a lui Schrödinger. În cea relativistă, a lui Dirac, apare și viteza luminii, c . Și nu e greu de bănuir că în viitoarele ecuații ale gravitației cuantice va interveni și G . Nu ne rămâne decât să așteptăm aceste ecuații, mulțumindu-ne deocamdată cu ecumenica formulă Bekenstein-Hawking.

NUMERE COSMICE

Entropia universului

Unitățile vechiului sistem de măsuri MKS (metru, kilogram, secundă) fuseseră definite luând drept referință anumite caracteristici ale Pământului: lungimea ecuatorului, greutatea apei și durata zilei. Unitățile *sistemului Planck*, mai modern, sunt definite luând ca referință anumite caracteristici absolute ale universului: constanta gravitațională universală a lui

Newton, constanta electrică a lui Coulomb, viteza luminii, constanta termodinamică a lui Boltzmann și cuanta de acțiune a lui Planck.¹

Odată definite lungimea, timpul, masa, sarcina electrică și temperatura Planck, constantele folosite pentru a le defini se pot exprima elegant. În particular, *constanta lui Newton* e atracția gravitațională exercitată de două mase Planck aflate la distanță Planck. *Constanta lui Coulomb* e atracția electrică exercitată de două sarcini Planck aflate la distanță Planck. *Viteza luminii* e viteza cu care se parcurge lungimea Planck în timpul Planck. *Constanta lui Boltzmann* e energia termică a temperaturii Planck. Iar *constanta lui Planck* e energia frecvenței egale cu inversul timpului Planck.

În practică, *timpul Planck* este circa 10^{-43} secunde. *Lungimea Planck* e cam de 10^{20} ori mai mică decât un proton. *Masa Planck* e cât a unui ou de purice, ori a 10^{19} protoni, și ar face să colapseze o cuantă într-o gaură neagră. *Sarcina Planck* e de 12 ori mai mică decât a unui electron sau a unui proton. În fine, *temperatura Planck* e circa 10^{30} de grade, iar un corp care ar avea-o ar emite radiații de lungime Planck.

Nu pare să fie vreo structură particulară în numerele astea, când le exprimăm în sistemul MKS, dar ceva semnificativ transpare atunci când se exprimă caracteristicile universului în unități Planck. Într-adevăr, în acest caz descoperim un număr magic, egal cu aproximativ 10^{61} , care măsoară simultan vârsta universului în timpi Planck, diametrul său în lungimi Planck, masa lui în mase Planck și inversul pătratului temperaturii sale în temperaturi Planck.

Cât despre entropia universului, ea depinde de doi factori. Mai întâi, unitatea de măsură, cea mai naturală fiind constanta lui Boltzmann, care în acest caz devine egală cu 1. Apoi, momentul măsurării, dat fiind că entropia e o funcție de timp.

Izotropia puternică a radiației cosmice de fond arată că, la puțin timp după big bang, universul se afla într-o stare de

1. Vezi secțiunea „Fizicienii dau numere“.

entropie termodinamică aproape maximă, măsurată de numărul fotonilor prezenți – în raport de circa zece miliarde la fiecare proton. Cum masa universului este de aproximativ 10^{61} mase Planck, iar o masă Planck e echivalentul a 10^{19} protoni, numărul protonilor din univers este de circa 10^{80} , iar entropia termodinamică a universului la început era de zece miliarde de ori mai mare, adică aproximativ 10^{90} .

Pentru a calcula entropia gravitațională a universului actual, să observăm că masa Căii Lactee e aproape integral concentrată în centrul ei, într-o gaură neagră supermasivă, cu masa de un milion de ori mai mare decât a Soarelui. Acum, entropia unei găuri negre cu masa egală cu a Soarelui e de 10^{77} și crește odată cu pătratul masei: deci entropia Căii Lactee e de 10^{12} ori mai mare, egală cu 10^{89} . Presupunând Calea Lactee o galaxie medie, cum galaxiile universului sunt în număr de 10^{11} , rezultă că entropia universului actual este de ordinul lui 10^{100} .

Din moment ce masa universului tinde să se concentreze în găuri negre din ce în ce mai masive, la sfârșitul timpului nu va mai exista decât o gaură neagră gigantică, având o masă al cărei pătrat, după formula lui Wheeler¹, e suma pătratelor maselor găurilor negre din centrul celor 10^{11} galaxii: așadar, de 10^{22} ori mai mare decât masa lor medie actuală. Entropia gravitațională, care crește cu pătratul masei, va trece atunci de la 10^{100} actual la 10^{122} final.

În *Ciclurile timpului*², Roger Penrose, Premiul Nobel pentru fizică, a sugerat că la sfârșitul universului vor mai rămâne aproape numai fotoni, într-o stare de entropie maximă, asemănătoare celei de la început. Și, cum fotonii se deplasează cu viteza luminii, timpul se va opri și universul va putea reporni de la zero, într-un alt big bang, pentru un alt ciclu (pe care Penrose îl numește *eon*) al istoriei sale.

1. Vezi secțiunea „Un Nobel de Oscar“.

2. Roger Penrose, *Cycles of Time: An Extraordinary New View of the Universe*, Bodley Head (UK), 2010.

FIZICĂ

EPITAF PENTRU STEVIN

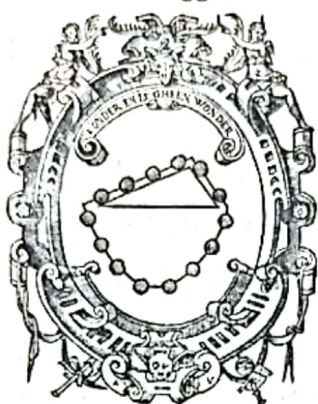
Regula paralelogramului

Cine se uită la deschiderile sau la cablurile de susținere ale podurilor mici sau mari, de exemplu Manhattan Bridge din New York, va observa că grinziile sunt dispuse într-o structură triunghiulară, brevetată de James Warren în 1848, de asta se vorbește adesea despre *poduri Warren*. Motivul e simplu: conform unuia dintre criteriile de egalitate, care se află deja în *Elementele* lui Euclid, un triunghi e complet determinat de cele trei laturi ale sale, așadar o structură triunghiulară e nedeformabilă.

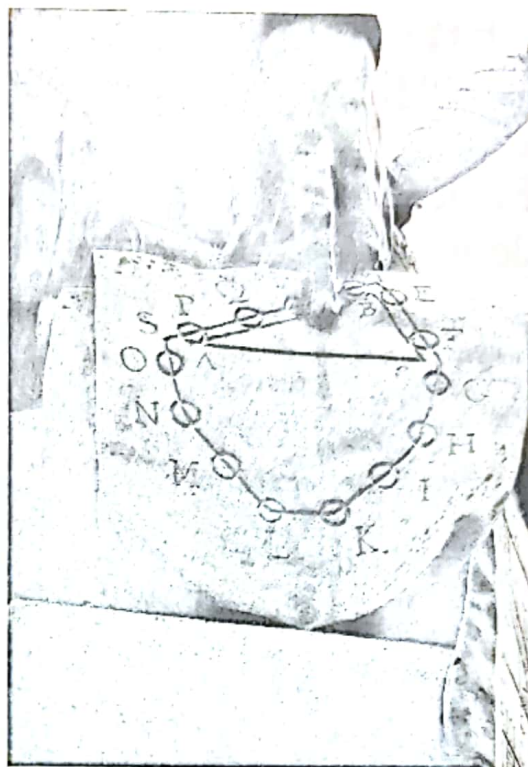
Nimic de felul acesta la structurile patrulatere, ca dreptunghiurile, care se deformează în paralelograme potrivit unor reguli precise: laturile opuse trebuie să rămână egale și paralele. Unghiurile opuse rămân egale. Iar diagonalele, chiar dacă încetează a mai fi egale, satisfac *regula paralelogramului*: suma pătratelor celor două diagonale e egală cu suma pătratelor celor patru laturi. O regulă care, în cazul dreptunghiurilor, se reduce la teorema lui Pitagora, conform căreia pătratul unei diagonale e egal cu suma pătratelor laturilor corespunzătoare.

Există însă și o *regulă a paralelogramului* care joacă un rol fundamental în fizică. A fost descoperită de flamandul Simon Stevin în *Principii de statică* (1586), și stabilește că două forțe care acționează simultan asupra unui corp se comportă ca o unică forță corespunzătoare diagonalei paralelogramului care

DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.



TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By François van Raphelinghen.
c15. 15. LXXXVI.



are drept laturi cele două forțe. Savantul flamand n-a formulat explicit regula, dar a aplicat-o implicit în cel mai celebru rezultat al său: anume că, pe un plan înclinat, o greutate acționează în manieră invers proporțională cu lungimea planului.

Ca s-o demonstreze, Stevin a făcut un tipic experiment mintal, închipuindu-și că plasează un lanț închis și omogen pe două plane înclinate alăturate. Dacă lanțul ar exercita forțe diferite la capetele orizontale, ar trebui să se rotească la infinit, într-o mișcare veșnică. Dar lanțul e în echilibru, și așa rămâne chiar dacă se taie partea din lanț care atârna sub orizontală, pentru că partea aceasta e simetrică. Iar cum cele două porțiuni rămase au masele proporționale cu lungimile respective, ca să rămână în echilibru trebuie să exercite forțe invers proporționale cu lungimile lor.

Stevin a fost atât de mulțumit de rezultatul său, încât a hotărât să pună să i-l graveze pe piatra de mormânt, dimpreună cu inscripția în flamandă *Wonder en is gheen wonder*, „Minunat, dar nu misterios“. În cartea sa clasică *Mecanica în dezvoltarea sa istorico-critică*, din 1883, Ernst Mach va vorbi, în legătură cu

acest rezultat, despre „combinația dintre un instinct extrem de ascuțit și cea mai înaltă capacitate de abstracție“. Iar în la fel de clasicele *Lecții de fizică**, din 1963, Richard Feynman va admite că „dacă cineva reușește să aibă un asemenea epitaf pe piatra de mormânt, chiar i-a mers bine“.

Și Galilei a aplicat implicit regula paralelogramului în studiul său asupra proiectilelor lansate orizontal, intuind că traiectoria se poate descompune în două mișcări independente: una orizontală și uniformă, cealaltă verticală și uniform accelerată, care pot fi descrise independent și apoi recombinate. Analiza a fost apoi extinsă ușor la aruncările oblice.

Regula paralelogramului a fost enunțată explicit și aproape simultan de Newton, în celebrul său studiu *Asupra mișcărilor corpurilor pe orbită* (1684), care a fost embrionul masivului *Principia*, și de Pierre Varignon în *Noua mecanică sau statica* (1687). Iată ce spunea Newton:

Când asupra unui corp acționează simultan două forțe, acesta e transportat, într-un interval de timp determinat, în locul în care l-ar fi transportat acele două forțe dacă ar fi acționat separat și succesiv în intervale de timp egale.

Cei care se ocupă cu matematica aplicată consideră regula paralelogramului o observație experimentală *a posteriori*: așa-i mersul lucrurilor, trebuie luat așa cum este și nu altfel. Dar cei care fac matematică pură pot cădea pradă ispitei de a o considera o intuiție rațională *a priori* – exact ce a făcut Daniel Bernoulli în a sa *Analiză a principiilor mecanicii și demonstrație geometrică a compunerii forțelor* (1726). Argumentul său arăta că regula poate fi dedusă din ipoteza că mai multe forțe care acționează împreună asupra unui corp pot fi echivalate cu una singură: ipoteză mai puțin precisă, dar tot empirică, pentru că, dacă vrem să înțelegem natura, trebuie să privim întotdeauna în afara noastră, nu doar în mintea noastră.

* *Fizica modernă*, Editura Tehnică, București, 1969–1970 (n. tr.).



PENDULUL E GREU

Constanta lui Galilei

Imaginarul asociat descoperirilor lui Galilei, după cum se vede, în parte, și pe monumentul său funerar din biserica Santa Croce din Florența, e format, în mod esențial, din trei instrumente: luneta, planul înclinat și pendulul.

Dacă primul instrument i-a folosit, evident, la observarea corpurilor cerești, celelalte două i-au permis în schimb să studieze căderea corpurilor grele și să deducă legile tipice ale mișcării uniform accelerate: accelerație constantă, viteză proporțională cu timpul, spațiu proporțional cu pătratul timpului.¹

În particular, pentru spațiul parcurs plecând de la o înălțime h , se obține că timpul de cădere în vid al unui corp greu este $(2h/g)^{1/2}$, unde g este accelerația gravitațională.

1. Vezi secțiunea „Puterea formulelor”.



PENDULUL E GREU

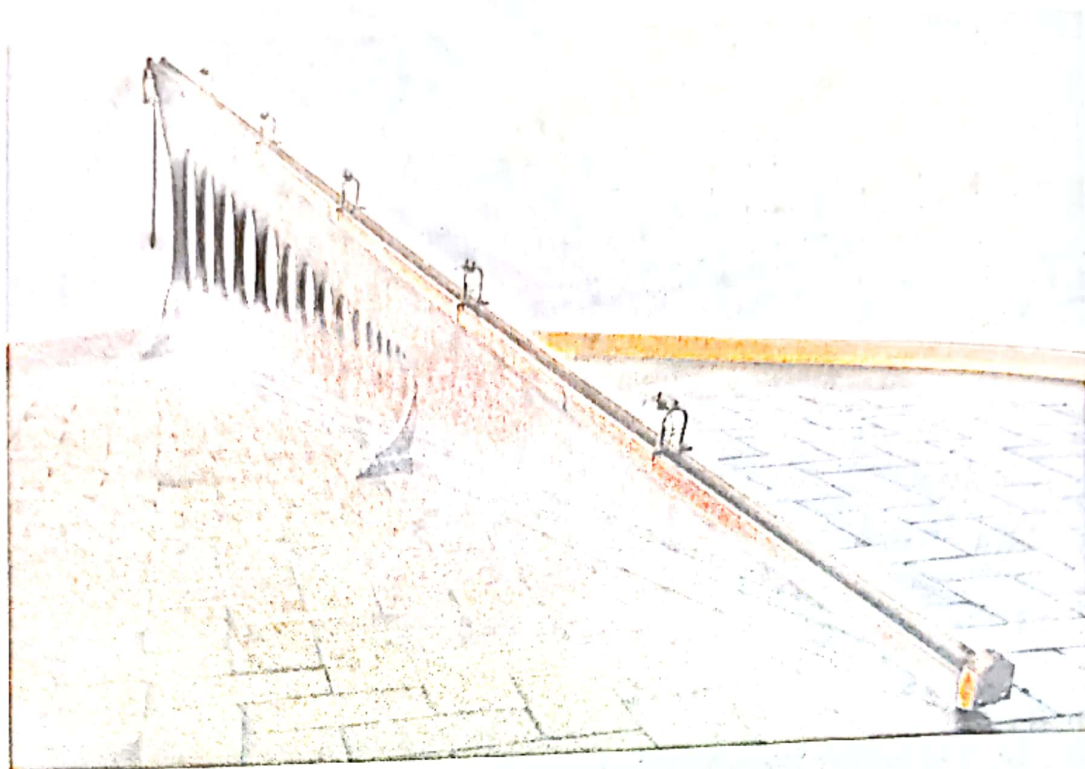
Constanta lui Galilei

Imaginarul asociat descoperirilor lui Galilei, după cum se vede, în parte, și pe monumentul său funerar din biserica Santa Croce din Florența, e format, în mod esențial, din trei instrumente: luneta, planul înclinat și pendulul.

Dacă primul instrument i-a folosit, evident, la observarea corpurilor cerești, celelalte două i-au permis în schimb să studieze căderea corpurilor grele și să deducă legile tipice ale mișcării uniform accelerate: accelerație constantă, viteză proporțională cu timpul, spațiu proporțional cu pătratul timpului.¹

În particular, pentru spațiul parcurs plecând de la o înălțime h , se obține că timpul de cădere în vid al unui corp greu este $(2h/g)^{1/2}$, unde g este accelerația gravitațională.

1. Vezi secțiunea „Puterea formulelor“.



Dar acestea sunt rezultatele finale ale cercetărilor lui Galilei, care povestește cum a ajuns la ele la finalul primei zile din *Discursuri și demonstrații matematice în jurul a două noi științe* (1638), ultima și cea mai mare operă a sa:

Pentru a mă putea folosi de mișcări cât se poate de lente, în care rezistența mediului nu afectează efectul care depinde doar de simpla gravitație, am început să consider posibilitatea de a face să alunece obiectele pe un plan înclinat, nu foarte abrupt în raport cu orizontala. Pe un astfel de plan, la fel ca și în cazul direcției verticale, se poate observa comportamentul diferit al obiectelor grele, în funcție de greutate.

Continuându-și povestirea, Galilei descrie și cum a trecut de la considerarea celebrelor plane înclinate la considerarea nu mai puțin celebrelor pendule:

Mergând mai departe, am dorit să mă eliberez de orice obstacol care ar putea să apară din contactul acestor obiecte pe planul înclinat menționat anterior: așa că am luat două bile, una de plumb și una de plută, cea dintâi fiind cu mult

mai grea decât a doua, de peste o sută de ori, și am legat fiecare din ele de două bețe subțiri egale, lungi de patru sau cinci brațe, fixate în partea superioară. Apoi, îndepărtându-le pe amândouă de la poziția verticală, le-am dat drumul în același moment, și ele, coborând pe cercurile descrise de bețe, cu semidiametre egale, depășind perpendiculara, s-au întors apoi pe aceleași trasee.

Legile pendulului care se mișcă fără frecare sunt analoage cu cele ale căderii libere în vid pe direcție verticală, în care se ia în considerare doar componenta gravitației tangente la traiectoria circulară a bilei: astfel, trebuie să înmulțim cu sinusul unghiului format în fiecare moment de fir față de verticală. Deoarece unghiurile mici sunt aproximativ egale cu sinusurile lor, pentru oscilații mici accelerația este proporțională cu unghiul însuși. Iar perioada depinde doar de lungimea pendulului, nu de greutatea sa sau de amplitudinea oscilațiilor. Mai precis, timpul de cădere al unui pendul de lungime l este egal cu $(\pi/2) \sqrt{l/g}$, unde g este tot accelerația gravitațională.

Această ultimă formulă seamănă foarte mult cu cea de mai sus, pentru căderea unui corp greu de la înălțimea l , iar raportul dintre cele două este $\pi/(2\sqrt{2})$, număr pe care istoricul Stillman Drake l-a numit *constantă lui Galilei* (1987), ceea ce e corect atât pentru substantiv, cât și pentru posesiv.

În ce privește substantivul, e vorba într-adevăr de o adevărată constantă adimensională *universală*, a cărei valoare nu doar că nu depinde de lungime ori de înălțime, dar nici măcar de accelerația gravitațională: cu alte cuvinte, rezultatul măsurat pe Pământ e același cu cel care ar fi măsurat pe orice altă planetă sau corp ceresc. În plus, în timp ce alte constante fizice, printre care chiar accelerația gravitațională, pot fi determinate experimental, dar (încă) nu sunt prezise de vreo teorie, constanta lui Galilei e descrisă de o formulă simplă care, în bună măsură, face să intervină cele două numere cele mai interesante din matematica greacă, legate de numele venerabile ale lui Pitagora și Arhimede.

Cât despre posesiv, analiza notelor de lucru ale lui Galilei, întreprinsă de același Drake, a arătat că savantul calculase experimental valoarea constantei pentru multe valori ale lungimii și înălțimii, găsind aproximarea $942/850$, egală cu circa $1,11$ și practic egală cu valoarea teoretică. Încă o dovadă a abilității sale de experimentator, în general, și a îndreptățirii patronimice, în particular.

FOCURI DE ARTIFICII

O problemă a lui Galilei

În ultimii ani de viață, condamnat de Inchiziție la arest domiciliu la Arcetri, Galilei și-a reluat studiile de tinerețe despre mecanică, adunându-și rezultatele în *Discursuri și demonstrații matematice în jurul a două noi științe* (1638).

Printre numeroasele bijuterii care se găsesc în această capodoperă găsim, de exemplu, celebrele legi ale mișcării pe care azi le învățăm la școală.¹ Dar sunt și perle mai puțin cunoscute, cum e cea din Propoziția VI din ziua a treia, în care Sagredo își pune următoarea întrebare:

Dacă ne imaginăm un plan orizontal, și pe acest plan fixăm un punct din care pleacă o infinitate de linii înclinate în toate direcțiile, pe care ne imaginăm obiecte grele alunecând cu mișcare natural accelerată, cu viteze corespunzătoare diferitelor înclinări, presupunând că aceste obiecte care alunecă ar fi vizibile în mod continuu, în ce feluri de linii le-am vedea noi mereu dispuse?

În termeni moderni, e vorba de a stabili care e curba pe care se găsesc la același moment de timp niște corpuri care se mișcă pe un același plan vertical, toate pornind dintr-un același punct

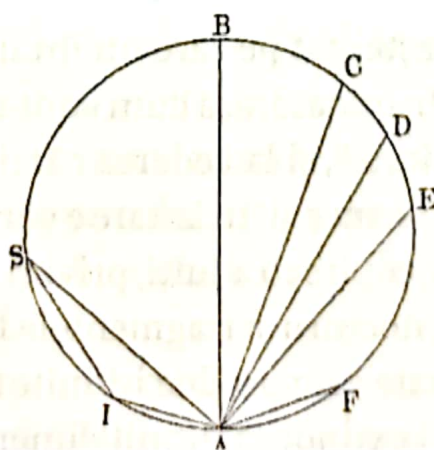
1. Vezi secțiunea „Puterea formulelor“.

și căzând de-a lungul unor traiectorii rectilinii înclinate după toate direcțiile posibile. Ca să răspundă acestei întrebări, Galilei își folosește rezultatele despre plane înclinate, rezultate care pot fi descrise și geometric, și analitic.

Cum nu avea la dispoziție instrumente analitice, Galilei folosește geometria. Descoperirea sa fundamentală a fost că un corp care alunecă de-a lungul unui plan înclinat ajunge la bază cu aceeași viteză ca și cum ar cădea vertical. Evident, timpul de cădere e diferit, anume proporțional cu lungimea planului înclinat.

Ca să găsească distanța parcursă de două corpuri în același timp, Galilei consideră triunghiul dreptunghic care are drept catete verticala și orizontala, iar drept ipotenuză planul înclinat, și trasează înălțimea corespunzătoare diagonalei: conform Propoziției VI.8 din *Elementele* lui Euclid, procedând astfel, triunghiul se împarte în două triunghiuri asemenea între ele și cu triunghiul mare. În particular, raportul dintre verticală și ipotenuză e egal cu raportul dintre proiecția verticalei și verticala însăși. Din proporționalitatea observată între timpii de cădere și lungimile parcurse, Galilei deduce că, în timpul necesar unui corp să cadă pe verticală, corpul de pe planul înclinat parcurge proiecția verticalei.

Legătura geometrică dintre pozițiile diferitelor corpuri la un moment de timp dat e că fiecare dintre ele e vârful unui triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză e verticala. Conform



Propoziției III.31 din *Elemente*, aceasta definește un cerc având drept diametru respectiva verticală, după cum arată imaginea inserată de Galilei în carte.

Dacă însă vrem să rezolvăm problema în manieră analitică, legile mișcării ale lui Galilei stabilesc că spațiul s parcurs de un corp care cade vertical într-un timp t este $s = gt^2/2$, unde g este accelerația gravitațională. Dacă acel corp cade de-a lungul unei traiectorii rectilinii înclinate cu un unghi de α grade față de verticală, accelerația gravitațională acționează asupra lui numai prin componenta ei verticală, deci e diminuată prin înmulțire cu cosinusul unghiului. La fel, spațiul parcurs suferă și el aceeași diminuare, iar locul geometric al punctelor în care se găsesc diferitele corpuri la timpul t este descris de $r = s \cos \alpha$, care e ecuația în coordonate polare a unui cerc de rază r .

După cum rezumă Sagredo la finalul discuției, răspunsul la întrebarea pusă la început e că acele corpuri care cad dintr-un același punct în diferite direcții „se văd toate pe aceleași circumferințe de cercuri din ce în ce mai mari”. Iar lucrul acesta e adevărat nu doar în două dimensiuni, ci și în trei:

Dacă de la punctul de pornire indicat înțelegem să plece linii nu doar pe suprafața verticală, ci în toate direcțiile, după cum s-a întâmplat înainte obținându-se cercuri, de la cel mai mic la cel mai mare, la fel se vor forma infinit de multe sfere, sau mai bine spus, o sferă care își va extinde la infinit dimensiunea.

Este un rezultat neașteptat pe care nu întâmplător Sagredo îl numește „o glumă frumoasă, așa cum sunt toate cele făcute de natură ori de necesitate”, și la vederea căreia „ești fermecat”.

Și efectiv despre farmec și încântare e vorba: aceleași care ne surprind și azi când, copii sau adulți, privim focurile de artificii explodând pe cerul nocturn și fragmentele lor luminându-l cu mii de scipiri colorate care produc infinite sfere succesive, ori o unică sferă care își extinde la infinit dimensiunea.



PUTEREA FORMULELOR

Legile mișcării

Spune un celebru fragment din *Saggiatore* al lui Galilei (1623):

Filozofia e scrisă în această carte măreață care stă mereu deschisă înaintea ochilor noștri (adică universul), dar nu poate fi înțeleasă dacă nu învățăm mai întâi să înțelegem limba și să cunoaștem caracterele în care e scrisă. Este scrisă în limbajul matematicii, iar caracterele sunt triunghiuri, cercuri și alte figuri geometrice, fără de care e imposibil să înțelegi vreun cuvânt omenesc; fără acestea, e doar o hoină-reală zadarnică printr-un labirint întunecat.

În realitate, am spune astăzi că Galilei greșea în felul în care avea dreptate, sau avea dreptate în felul în care greșea. Faimoasele sale rezultate despre mișcarea uniform accelerată descrise în *Discurs despre două noi științe* (1638) se exprimă într-adevăr în limbaj matematic, dar cu caracterele analizei, nu cu ale geometriei. Mai precis, totul se reduce la a presupune că accelerația a este constantă, și a deduce de aici, prin integrare, două ecuații simple: $v = at$ și $s = at^2/2$.

Cum cele două formule determină și viteza, și spațiul parcurs în funcție de timpul t , putem elimina ușor între ele variabila t ,

obținând o a treia formulă care leagă spațiul de viteză: $s = v^2/2a$. Și ne dăm seama, așa cum i s-a întâmplat mai întâi lui Huygens, că a doua și a treia formulă permit o abordare alternativă a mecanicii, care depinde acum de spațiu, și nu de timp. Într-adevăr, din ele se obțin formulele: $v = (2as)^{1/2}$ și $t = (2s/a)^{1/2}$.

La început, Galilei a confundat cele două abordări, scriindu-i lui Paolo Serpi în 1603 că viteza e proporțională nu cu timpul, ci cu spațiul: presupunea, deci, că $v = cs$, la fel cum făcuse deja Albert de Saxonia, în *Probleme foarte subtile* (1390). Eroare pe care azi noi n-o putem replica, pentru că vedem imediat că soluția ecuației diferențiale e o funcție exponențială, iar aceasta nu se anulează niciodată: așadar, nu poate descrie mișcarea unui corp care pornește din stare de repaus.

Pentru a merge mai departe de formulele precedente și a putea descrie efectul unei forțe F asupra unei mase m , trebuie să înțelegem de care anume dintre caracteristicile mișcării e legată forța. Lucrul nu era limpede la început, s-a discutat îndelung asupra diferitelor posibilități: în particular, Galilei și Descartes propuneau „cantitatea de mișcare” mv , Leibniz propunea „forța vie” mv^2 , iar Newton ma . În mod paradoxal, toate trei propunerile erau întemeiate, dar se refereau la aspecte diferite.

Azi știm că definiția corectă a forței e cea propusă de Newton în *Principia*, anume $F = ma$. Odată lămurit acest lucru, restul decurge automat din formulele precedente, înmulțind ambii membri cu masa. Din prima se obține $Ft = mv$, care echivalează impulsul unei forțe cu cantitatea de mișcare. Iar din a treia se obține $Fs = mv^2/2$, care pune semnul egal între lucrul mecanic al unei forțe și energia sa cinetică. Altfel spus, Descartes și Leibniz nu defineau forța, ci măsurau efectul ei în timp și spațiu, adică impulsul furnizat și lucrul mecanic efectuat.

Data o forță F care acționează asupra unui corp de masă m , formula impulsului permite determinarea, pe de o parte, a vitezei obținute după un anumit timp, și, pe de altă parte, timpul în care se ajunge la respectiva viteză. Formula lucrului

mecanic permite, în schimb, determinarea vitezei după parcurgerea unui anumit spațiu și, pe de altă parte, spațiul care trebuie parcurs pentru a atinge o anumită viteză.

La fel ca pentru formulele de plecare, și cele la care s-a ajuns sunt expresii a două filozofii alternative, chiar dacă echivalente din punct de vedere tehnic. Și după cum privilegiam conceptele de timp, cantitate de mișcare și impuls, ori pe cele de spațiu, energie cinetică și lucru mecanic, obținem abordările mecanicii ale lui Galilei, Descartes și Newton, respectiv ale lui Kepler, Leibniz și Huygens.

Cum ecuațiile impulsului și lucrului mecanic arată că forțele sunt cele care generează variațiile cantității de mișcare și energiei cinetice ale maselor, prin efectul lor în timp și spațiu, cantitatea de mișcare și energia cinetică ale unui sistem închis (care nici nu pierde, nici nu dobândește masă) și izolat (asupra căruia nu acționează forțe exterioare) se conservă. Se obțin astfel cele două principii de conservare fundamentale ale mecanicii ca simple consecințe a două biete formule. Clară demonstrație a puterii matematicii intuite de Galilei.

LENEA COSMICĂ

Principiul minimei acțiuni

După cum tocmai am văzut, mecanica și-a primit baza matematică atunci când Newton a definit *forța* drept ceea ce noi azi exprimăm cu formula $F = ma$. Alte definiții fuseseră date de Descartes și de Galilei, pe de o parte, de Leibniz, pe altă parte, chiar dacă ulterior s-a înțeles că aceștia defineau de fapt efectul forței în timp și spațiu, introducând conceptele de *impuls* și *lucru mecanic*, pe care noi le exprimăm azi prin formulele $Ft = mv$ și $Fs = mas$ (sau, echivalent, $Fs = mv^2/2$).

La jumătatea secolului XVIII, Pierre Louis Maupertuis a introdus o abordare complet diferită, în două lucrări care au

stârnit multe comentarii: *Acordul între legi diferite și aparent incompatibile* (1744) și *Legile mișcării și ale repausului deduse dintr-un principiu metafizic* (1746). Ideea lui Maupertuis a fost să introducă un nou concept, *acțiunea*, pe care noi îl exprimăm azi prin formula $Fts = mvs$, și să fundamenteze mecanica pe *principiul minimei acțiuni*: „Dintre toate traiectoriile posibile, un corp se mișcă de-a lungul celei care face ca acțiunea să fie minimă.”

Discuțiile în legătură cu acest principiu se învâртеau în jurul „metafizicii” conținute în el. În primul rând, faptul că e de natură globală, iar nu locală: altfel spus, în timp ce legea lui Newton permite determinarea traiectoriei punct cu punct, principiul lui Maupertuis izolează întreaga traiectorie dintre toate cele posibile. Apoi, faptul că exact această „globalitate” pare să confere principiului o caracteristică „teleologică” și „finalistă”: altfel spus, pare că mișcarea e determinată de rezultatul ei final mai degrabă decât de cauzele inițiale.

Existaseră însă precedente care, în lumina noului principiu, apăreau drept anticipări. Într-adevăr grecul Heron observase încă din primul secol al erei noastre că drumul pe care se reflectă lumina care se mișcă într-un același mediu urmează traseul *cel mai scurt*. Către anul 1000, arabul Alhazen observase că și reflexia luminii, când se mișcă în același mediu, și refracția, atunci când trece dintr-un mediu în altul, se fac pe traseul *cel mai rapid*. În fine, Maupertuis a înțeles că, în general, lumina se deplasează pe traseul *cel mai leneș* față de o acțiune care combină și spațiul, și viteza.

Încă de la început, Euler a apărat principiul lui Maupertuis, intuind că metafizica poate fi neglijată și interpretarea se poate face în termeni de fizică pură. În nota „Asupra mișcării particulelor, determinată cu o metodă de maxime și minime” (1744), Euler a arătat că din principiul lui Maupertuis poți să obții nu doar forma traiectoriei unui corp în mișcare, ci și clasicele ecuații ale mișcării.

Intuiția lui Euler a arătat că nu era nici o contradicție între abordarea locală a lui Newton și aceea globală a lui Maupertuis, bazate respectiv pe noțiunile de forță și de acțiune. Iar în 1755 Lagrange a aplicat metoda lui Euler pentru a rezolva problema *tautocronei*: găsirea acelei curbe pe care un corp care alunecă numai sub acțiunea forței gravitaționale ajunge la capătul de jos în același timp, indiferent din ce punct al curbei ar pleca.

Ulterior, Lagrange a generalizat metoda în *Mecanica analitică* (1788) și a reformulat întreaga teorie în maniera lui Maupertuis, cu o singură diferență. Maupertuis definise acțiunea Fts descompunând-o în produsul impulsului Ft cu spațiul, făcând să intre în joc cantitatea de mișcare, mv . Lagrange, în schimb, a descompus acțiunea în produsul lucrului mecanic, Fs , cu timpul, făcând astfel să apară energia cinetică, $mv^2/2$.

Sistematizarea definitivă a acestei abordări a fost realizată de Hamilton în *O metodă generală a dinamicii* (1834). El a definit *lagrangeanul* L ca sumă algebrică dintre energia potențială și energia cinetică a unui sistem mecanic, și, mai general, *hamiltonianul* H ca sumă algebrică a tuturor energiilor posibile ale sistemului. A arătat apoi că ecuațiile mișcării se pot deduce din condiția ca produsul Lt ori Ht să fie staționar: adică să fie un minim, un maxim, sau un punct de inflexiune.

Mai târziu, abordarea lui Maupertuis a fost adaptată și pentru relativitate și mecanica cuantică. În relativitate, de pildă, traiectoria unui corp într-un câmp gravitațional e o curbă de lungime minimă, numită *geodezică*. În mecanica cuantică, constanta lui Planck, care leagă energia de frecvență în formula $E = h\nu$, este exact o *cuantă de acțiune*. Dovadă a faptului că obscuritățile metafizice sfârșesc uneori prin a ilumina fizica.

În 1745, matematicianul Paul de Gua de Malves a fost însărcinat să traducă din engleză în franceză *Ciclopaedia* sau *Dicționarul universal al artelor și științelor* al lui Ephraim Chambers, publicat cu oarece succes în Anglia în 1827. Printre alții, el i-a recrutat pe scriitorul Denis Diderot și pe matematicianul Jean Baptiste d'Alembert. În 1847, cei doi l-au înlocuit la direcția editorială și, în plus, au transformat proiectul într-unul mult mai ambițios: celebra *Enciclopedie a științelor, artelor și meseriilor*, ale cărei 35 de volume s-au publicat între 1751 și 1772.

D'Alembert a fost codirector al proiectului până în 1759, când l-a lăsat doar pe Diderot la conducere, dar încă din 1752 își restrânsese contribuția numai la intrările matematice ale enciclopediei. Una dintre ele a intrat în istorie, dar din alt motiv decât a intrat restul *Enciclopediei*. E vorba despre *Cap sau pajură (analiza probabilităților)**, din al patrulea volum din 1754, în care se putea citi:

Jocul acesta, foarte cunoscut și care nu are nevoie de definiție, ne conduce la următoarele cugetări. Ne întrebăm care e probabilitatea să iasă cap la cel puțin una din două aruncări consecutive. Răspunsul pe care-l dau cei mai mulți autori, conform principiilor uzuale, e următorul. Există patru combinații de tipul prima aruncare – a doua aruncare: cap-cap, pajură-cap, cap-pajură, pajură-pajură. Dintre acestea, trei sunt câștigătoare și numai una perdantă. Există deci 3 șanse din 4 pentru jucătorul care dă cu banul. Dacă ar arunca banul de trei ori, ar avea opt combinații, cu doar una singură perdantă și șapte câștigătoare, deci probabilitatea ar fi de $7/8$.

Dar e corect acest raționament? Pentru că, dacă n-ar fi să examinăm decât cazul cu două aruncări, n-ar trebui oare

* *Croix ou pile*, în original (n. tr.).

să reducem la una cele două combinații cu cap la prima aruncare? Pentru că, odată ce a ieșit cap, jocul s-a terminat, a doua aruncare nu mai contează.

Astfel, n-ar fi de fapt decât trei combinații: cap de la prima aruncare, pajură-cap, pajură-pajură. Ar fi deci o probabilitate de $2/3$.

Și la fel, în cazul a trei aruncări, am găsi cap, pajură-cap, pajură-pajură-cap, pajură-pajură-pajură, deci o probabilitate de $3/4$.

Mi se pare că acest lucru e vrednic de atenția matematicienilor și va reforma multe dintre regulile universal acceptate pentru jocurile de noroc.

Daniel Bernoulli a găsit „absurde” aceste raționamente, dar d'Alembert le-a reluat în 1761, în *Gânduri asupra calculului probabilităților*. Intrarea *Probabilități* din *Enciclopedia*, în al treisprezecelea volum din 1765, a fost deci încredințată altcuiva. Ulterior însă, marchizii Nicolas de Condorcet și Pierre Simon de Laplace au luat în serios unele dintre obiecțiile lui d'Alembert, care încerca să facă distincție între feluri de probabilități: în particular, susținând că un eveniment poate fi mai mult sau mai puțin probabil decât un altul din punct de vedere fizic, filozofic sau psihologic, chiar dacă ambele evenimente au aceeași probabilitate din punct de vedere matematic.

Eroarea aceasta a lui d'Alembert a fost repetată în 1924, de data asta din pură neatenție, de fizicianul Satyendra Bose, într-o conferință la Universitatea din Dacca, în Bangladeshul de azi. Subiectul era comportamentul fotonilor într-un anumit experiment, iar Bose a presupus că probabilitatea să iasă cap în cel puțin una din două aruncări consecutive e $2/3$, nu $3/4$. În mod surprinzător însă, rezultatele experimentului au confirmat predicția făcută cu calculul greșit!

În articolul *Legea lui Planck și ipoteza cuantelor de lumină*, Bose a propus, pe urmele lui d'Alembert, să fie abandonată probabilitatea matematică și să se adopte o nouă probabilitate fizică,

adaptată descrierii fenomenelor în care intervin fotonii. A propus articolul unei reviste engleze, care l-a refuzat. Bose a apelat atunci la Einstein, care a tradus întâi articolul în germană, apoi l-a și publicat în Germania. După care și-a dat seama că noua probabilitate poate fi folosită și pentru a descrie gazele în care toate particulele se află în aceeași stare.

Astăzi, *statistica lui Bose și Einstein* descrie comportamentul unei întregi clase de particule numite, în onoarea lui Bose, „bosoni”, și permite explicarea unor fenomene care merg de la laser la heliul superfluid. Bose n-a primit niciodată Premiul Nobel, dar l-au primit în 2001 Eric Cornell, Carl Wieman și Wolfgang Ketterle pentru descoperirea condensatului Bose-Einstein (BEC), prezis de Einstein folosind probabilitatea lui d'Alembert regăsită de Bose.

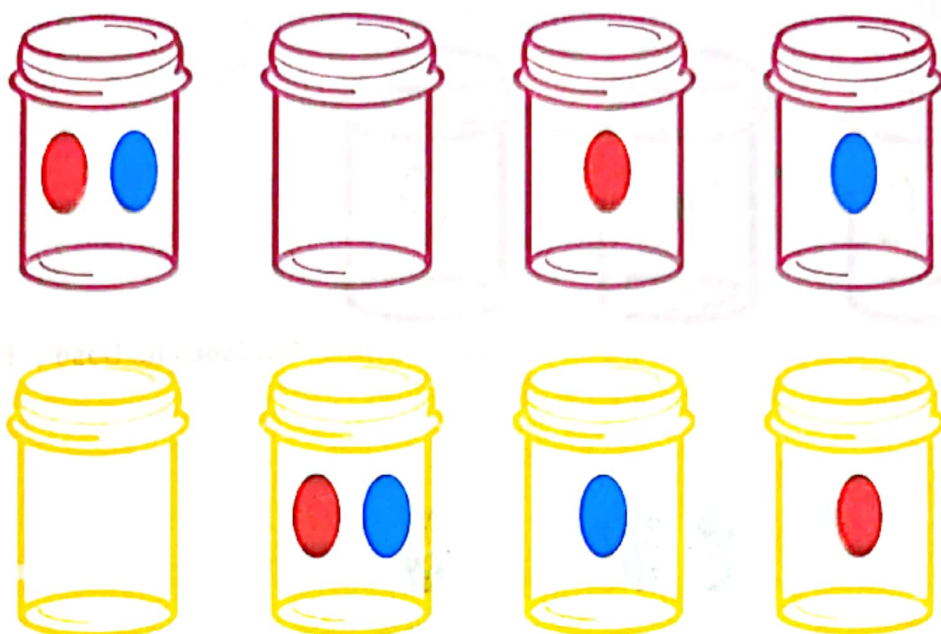
A PUNE BILE ÎN CUTII

Statistici alternative

Conform unei definiții de-acum clasice a lui Giancarlo Rota, eclecticul matematician și filozof de la Massachusetts Institute of Technology, nepot de unchi al compozitorului Nino Rota și al scriitorului Ennio Flaiano, „combinatorica e arta de a vedea în câte feluri se pot pune bile de culori diferite în cutii de culori diferite”. Pare jocul cel mai simplu din lume: cel puțin dacă bilele și cutiile sunt ceea ce înțelegem de obicei prin aceste cuvinte, iar culorile servesc numai ca să le deosebim ușor unele de altele.

De exemplu, dacă avem două bile diferite, deci care se pot deosebi, să încercăm să vedem în câte moduri le putem pune în două cutii diferite. Evident, în patru feluri: ambele bile în prima cutie, ambele în a doua cutie, prima bilă în prima cutie și a doua bilă în a doua cutie, sau a doua bilă în prima cutie și prima bilă în a doua cutie.

Calculul de felul acesta stă la baza a ceea ce în fizică se numește *statistica lui Maxwell și Boltzmann*, pentru că a fost adoptată



Statistica lui Maxwell și Boltzmann

de James Maxwell în „Ilustrații pentru o teorie dinamică a gazelor” (1860) și de Ludwig Boltzmann în „Cercetări ulterioare asupra echilibrului termic dintre moleculele unui gaz” (1872). Așa cum se poate intui încă din titlurile lucrărilor, în statistica lui Maxwell și Boltzmann bilele sunt moleculele unui gaz, iar culorile lor sunt microstările determinate de poziții, mase și viteze. Cutiile sunt aici recipientele, iar culorile lor sunt macrostările determinate de presiuni, volume, temperaturi și densități.

Una dintre proprietățile fundamentale care stă la baza statisticii lui Maxwell și Boltzmann e că, la fel ca două bile de culori diferite, și două molecule diferite se pot deosebi între ele. Dar, dacă două bile diferite n-ar putea fi deosebite, atunci ar exista numai trei posibilități de a le pune în două cutii diferite, nu patru. Într-adevăr, am putea să le punem pe ambele în prima cutie, pe ambele în a doua cutie, sau câte una în fiecare cutie și, schimbând bilele între ele, nu s-ar vedea nici o diferență, tocmai pentru că bilele nu se pot deosebi una de alta.

Calculule de acest fel stau la baza a ceea ce în fizică se numește *statistica lui Bose și Einstein*¹, adoptată de Satyendra Bose în

1. Vezi secțiunea „Arta de a greși la calcule”.



Statistica lui Bose și Einstein



articolul „Legea lui Planck și ipoteza cuantelor de lumină” (1924) și de Einstein în „Teoria cuantică a gazelor ideale monoatomice” (1924). Cum iarăși se vede încă din titluri, în statistica lui Bose și Einstein, bilele sunt fotoni (sau, mai general, bosonii care mediază forțele) sau moleculele gazelor în care toate moleculele au aceeași microstare (azi numite, tocmai de aceea, „condensate Bose-Einstein”).

Una dintre proprietățile fundamentale care stă la baza statisticii Bose-Einstein e că doi bosoni diferiți pot exista într-o aceeași stare cuantică, care corespunde unei cutii. Dar dacă două bile diferite ar fi nu doar imposibil de deosebit între ele, dar nici nu ar putea sta în aceeași cutie, atunci ar fi un singur mod în care le-am putea pune în două cutii diferite, nu trei. Într-adevăr, am putea pune una într-o cutie și cealaltă în a doua.

Calculul de acest fel stă la baza a ceea ce în fizică se numește *statistica lui Fermi și Dirac*, adoptată de Enrico Fermi în „Despre cuantificarea perfectă a gazului monoatomic” (1926) și de Paul Dirac în „Asupra teoriei mecanicii cuantice” (1926). În statistica lui Fermi și Dirac, bilele sunt electroni (și, mai general, fermionii constituenți ai atomilor), a căror proprietate caracteristică e de a satisface *principiul de excluziune al lui*



Statistica lui Fermi și Dirac



Pauli, conform căruia mai mulți fermioni de același tip nu se pot afla în aceeași stare cuantică.

Probabilitatea de a găsi două particule de același tip în aceeași stare este $2/3$ pentru bosonii care mediază forțele ori pentru moleculele care compun condensatele, este $1/2$ pentru moleculele care compun gazele și este 0 pentru fermionii care alcătuiesc atomii. Așadar, în ultimă analiză, diferențele de comportament fizic dintre particule se reduc la diferențele matematice dintre cele trei statistici, dovadă a „nerezonabilei eficacități a matematicii în științele naturale”, după fericita expresie a lui Eugene Wigner.

CĂLĂRIND VALUL DE-A-NDOASELEA

Potențiale avansate

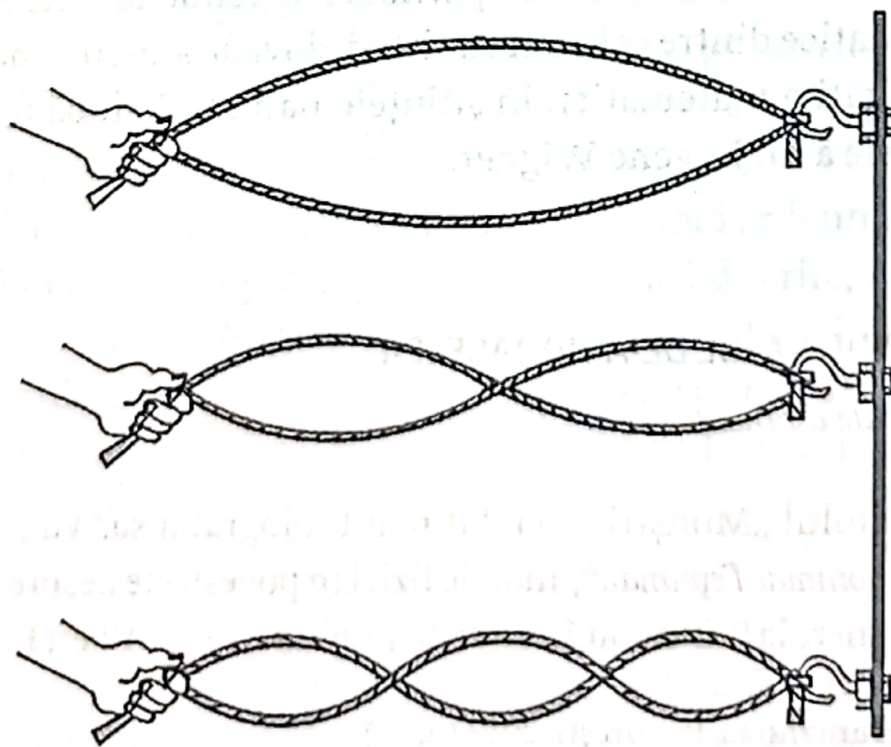
În capitolul „Monștrii sacri” din autobiografia sa, *Vă țineți de glume, domnule Feynman**, marele fizician povestește despre prima sa expunere la Princeton, în 1941. În public se afla și Albert Einstein

* Humanitas, București, 2013 (n. tr.).

care, l-a sosit, i-a spus junelui student: „Salut! Vin să te-ascult. Dar, mai întâi, unde se dă ceaiul?” Era și Wolfgang Pauli, care a dat din cap a aprobare tot timpul, pentru că avea Parkinson, dar la sfârșit s-a ridicat și-a spus: „Nu cred în teoria ta din mothivele acestha și acestha.”

Particularitatea lucrării prezentate de Feynman venea din folosirea potențialelor avansate, în care *efectele* preced declanșarea *acțiunii*: un mod de a gândi eretic, față de potențialele retardate, în care *efectele* urmează *cauzelor* lor. Dar un mod de a gândi sugerat de matematica ecuației undelor care admite, în general, două tipuri de soluție: una care merge într-o direcție, spațială sau temporală, și una care merge în sens opus.

Primul care și-a dat seama de existența celor două soluții a fost Jean Baptiste d'Alembert, care a găsit, în 1747, celebra sa ecuație a undelor pentru coarda vibrantă, cu soluția generală exprimată ca sumă a două unde care se deplasează în direcții opuse între punctele în care e fixată coarda. Din studiul interacțiunii lor, Daniel Bernoulli a dedus în 1775 existența unor unde staționare, în care unele puncte ale corzii rămân fixe, în



timp ce restul corzii se mișcă la unison între ele. Aceste unde constituie armonicele tonului fundamental produs de coardă și sunt responsabile de bogăția acustică a sunetelor naturale față de cele pure, ca acelea produse de un diapazon ori de un instrument electronic.

După cum a descoperit Paul Heyl în 1897, și ecuațiile lui Maxwell pentru undele electromagnetice admit două soluții care, de data asta, se deplasează în două direcții opuse temporale (nu spațiale): una dinspre trecut spre viitor, cealaltă dinspre viitor spre trecut. De obicei, a doua soluție e înlăturată ca fiind absurdă din punct de vedere fizic, dar în 1908 Walter Ritz a susținut că existența sa demonstrează inadecvarea ecuațiilor lui Maxwell. Într-adevăr, o teorie reversibilă la nivel microscopic se află în dificultate când trebuie să explice cum anume se generează ireversibilitatea la nivel macroscopic, una dintre numeroasele manifestări ale acestei ireversibilități fiind tocmai existența unei „săgeți electromagnetice” care interzice existența potențialelor avansate, la care efectele preced cauzele.



Einstein n-a fost de acord, iar cei doi au publicat împreună articolul „Despre stadiul cercetărilor în problema radiației” (1909), în care au rezumat în mod oficial termenii dezbaterii. Dar problema undelor retrograde din punct de vedere temporal a revenit încă mai dramatică în 1925, odată cu apariția ecuației lui Schrödinger din mecanica cuantică: și aceasta admite două soluții, una orientată înainte, cealaltă orientată înapoi în timp, dar de data aceasta ambele convin pentru calculul probabilității descrise de unda care, de fapt, se obține înmulțind cele două unde complexe și conjugate între ele, astfel că rezultatul e o valoare reală.

Era deci vorba despre interpretarea rezonabilă din punct de vedere fizic a ambelor aspecte, iar soluția s-a dovedit aplicabilă și electromagnetismului. Practic, în cazul ecuației lui Schrödinger s-a înțeles că *tot ce există în trecut e o particulă de materie, iar tot ce există în viitor e o undă de probabilitate*: doar în

prezent se întâlnesc cele două realități, dând naștere dualismului undă-particulă. La fel și în cazul ecuațiilor lui Maxwell, se poate spune că *tot ce există în trecut e un curent, iar tot ce există în viitor e un câmp*: unda care se deplasează din trecut către viitor corespunde câmpului electromagnetic produs de un curent, iar unda care se deplasează din viitor înspre trecut corespunde curentului produs de un câmp electromagnetic.

Puțin mai târziu, în 1925, și Dirac a descoperit că ecuația de undă relativistă admite două soluții, corespunzând respectiv materiei și antimateriei. Iar în 1949, Feynman însuși a propus *interpretarea antimateriei ca materie care călătorește înapoi în timp*, închizând astfel cercul pe care începuse să-l deseneze în prima sa expunere de la Princeton. Un cerc pe care l-a desenat și datorită lui Einstein, care i-a arătat în 1941 articolul lui cu Ritz. Și un cerc care arată cum matematica trebuie luată în serios, luând în calcul toate soluțiile ecuațiilor ei, inclusiv acelea care, la prima vedere, par lipsite de sens.

FIZICIENII DAU NUMERE

Constante universale

În timp ce matematicienii au norocul să lucreze cu numere adimensionale, care aparțin unei lumi absolute, fizicienii au ghinionul de a fi nevoiți să manevreze numere dimensionale, care derivă din diferite sisteme de măsură relative. De exemplu, după Revoluția Franceză, unitățile de masă, lungime și timp au fost definite prin referire la anumite caracteristici provinciale ale Pământului: greutatea (gramul ca o masă de apă), dimensiunile sale (metrul ca o fracțiune de meridian) și mișcarea sa în jurul Soarelui (secunda ca o fracțiune de zi).

Dar cum fizica are pretenția să descrie întreg universul, nu doar împrejurimile Pământului, e natural ca fizicienii să-și dorească să se descătușeze cât mai repede de constrângerile

sistemelor de referință antropocentrice, inventând unele „absolute”. Primul care a reușit a fost George Stoney, intrat în istorie pentru a fi prezis corect sarcina electrică a electronului și pentru a-l fi botezat cu numele de azi. Chiar dacă prima sa alegere fusese „electrin”, propusă de el la pachet cu „masin”, „lunghețin” și „tempin”.

Într-o conferință despre „Unitățile fizice ale naturii” (1874), Stoney a observat că se pot combina univoc între ele sarcina electronului e , constanta gravitațională G și viteza luminii c , așa încât să se obțină cele trei unități de masă $(e^2/G)^{1/2}$, de lungime $(e^2G/c^4)^{1/2}$, și de timp $(e^2G/c^6)^{1/2}$, egale respectiv cu circa 10^{-7} grame, 10^{-35} centimetri și 10^{-46} secunde.

În articolul „Asupra proceselor de radiație independente” (1899), Planck a ajuns la rezultate asemănătoare, luând ca punct de plecare cuanta de acțiune h în loc de sarcina electronului, obținând cele trei unități de masă $(hc/G)^{1/2}$, de lungime $(hg/c^3)^{1/2}$ și de timp $(hg/c^5)^{1/2}$ care azi îi poartă numele și sunt egale, respectiv cu circa 10^{-5} grame, 10^{-33} centimetri și 10^{-43} secunde. Aceste unități sunt limitele teoriilor actuale, în sensul că studiul particulelor cu mase sau dimensiuni de ordinul celor ale lui Planck sau al universului dinainte de era Planck e dincolo de cuprinderea mecanicii cuantice și a relativității generale, reclamând unificarea lor, de exemplu în teoria corzilor.

Planck a fost foarte satisfăcut de descoperirea unităților lui de măsură, pentru că ele „își mențin semnificația în orice timp și loc, fiind mereu aceleași, chiar dacă sunt măsurate de inteligențe foarte diferite”. Iar ingredientele constantelor sale au devenit atât de populare, încât i-au inspirat lui George Gamow inițialele (G.C.H.) numelui protagonistului din celebra carte de popularizare a științei *Aventurile domnului Tompkins* (1939).

Chiar universale fiind, unitățile de măsură ale lui Stoney și Planck sunt încă dimensionale și nu ajung la caracterul absolut al numerelor adimensionale din matematică. Constantele folosite de Stoney ori de Planck nu pot fi combinate așa încât să se obțină o mărime adimensională, dar lucrul e

posibil amestecându-le: se obține astfel $2\pi e^2/hc$, numită *constantă structurii fine*, egală cu aproximativ $1/137$. O altă constantă clar adimensională e raportul dintre masa protonului și cea a electronului, aproximativ 1836.

Guru al constantelor adimensionale din fizică a fost astronomul Arthur Eddington care, în „Notă preliminară despre masele electronului, protonului și universului” (1931), a încercat să lege între ele primele două mase prin intermediul ecuației $10x^2 - 136x + 1 = 0$, ale cărei soluții sunt în raportul 1847,6 la 1. A observat și legătura dintre alte două constante adimensionale: numărul de protoni din univers, egal cu aproximativ 10^{80} , și raportul dintre forța electromagnetică și forța gravitațională care acționează între un proton și un electron, egal cam cu 10^{40} , deci rădăcina pătrată a celui dinainte.

Speculațiile lui Eddington n-au convins pe nimeni. Cum nici cele despre „Constantele cosmologice”, din 1937, ale lui Paul Dirac – acesta a mai adăugat și raportul dintre raza universului și raza electronului, aproximativ 10^{40} . Rămâne deocamdată neîmplinit visul lui Einstein descris într-o scrisoare din 13 octombrie 1945 către Ilse Rosenthal-Schneider:

Într-o teorie rezonabilă nu există constante adimensionale ale căror valori să poată fi determinate doar în mod empiric. Nu-mi pot imagina o teorie unitară în care să fie conținut explicit un număr pe care Creatorul l-ar fi putut înlocui fără nici o problemă cu un altul, după voia lui, determinând astfel o ordine universală calitativ diferită.

MAXWELL FOREVER

Ecuațiile Yang-Mills

Cele patru ecuații cu derivate parțiale obținute de Maxwell în 1865, care pun în acord legile electricității și ale magnetismului descoperite de Coulomb în 1875, de Gauss în 1813, de Ampère

Ecuatiile lui Maxwell
pe statuia sa din Edinburgh

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned}$$

în 1832 și de Faraday în 1831, au constituit prima unificare a două forțe fizice aparent distincte, electricitatea și magnetismul, într-o unică forță numită electromagnetism.

Ecuatiile lui Maxwell s-au dovedit perfect compatibile cu teoria relativității. În primul rând, s-a văzut că undele electromagnetice prezise de ele se deplasează în vid cu viteza luminii, viteză care a apărut pe neașteptate în aceste ecuații sub forma inversului rădăcinii pătrate a produsului dintre constanta de permitivitate electrică a lui Coulomb și cea de permeabilitate magnetică a lui Ampère. În plus, Albert Einstein a demonstrat în 1905 că ecuațiile lui Maxwell sunt în mod intrinsec relativiste: nu doar că sunt invariante la grupul transformărilor Lorentz, ci acestea din urmă sunt singurele transformări spațio-temporale care lasă invariante ecuațiile lui Maxwell.

Și mecanica cuantică s-a dovedit compatibilă cu ecuațiile lui Maxwell, rezultat al unei lungi elaborări colective a *electrodinamicii cuantice* (QED), care a culminat în formulările echivalente ale lui Shin'Ichiro Tomonaga, Julian Schwinger și Richard Feynman, realizare pentru care au primit Premiul Nobel pentru fizică în 1965. În particular, în această nouă teorie s-a dovedit esențială o anumită simetrie de renormare (*gauge*) care lasă invariante ecuațiile lui Maxwell cuantificate și are structura matematică a

unui grup comutativ notat $U(1)$: e grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul unitar.

Această simetrie fusese deja anticipată în 1867 pentru ecuațiile lui Maxwell clasice de danezul Ludwig Lorenz (care nu trebuie confundat cu olandezul Hendrik Lorentz, părintele omonimelor transformări relativiste). Însă cel care a formulat simetria de renormare în limbaj algebric a fost Hermann Weyl – tot el i-a subliniat importanța pentru teoriile unificate, în cartea *Teoria grupurilor și mecanica cuantică* (1928).

Ideea de a extinde ecuațiile lui Maxwell păstrându-le simetria de renormare, dar schimbând grupul în funcție de forța considerată, a fost propusă de Chen Ning Yang și Robert Mills în 1954. De atunci încolo, teoria grupurilor a devenit un instrument de bază în dezvoltarea fizicii teoretice. Saltul calitativ făcut de Yang și Mills a constat în trecerea de la grupul comutativ $U(1)$ la cel necomutativ $SU(2)$: grupul multiplicativ al cuaternionilor unitari.

La început, Yang și Mills sperau să poată trata astfel forța nucleară tare, responsabilă pentru confinarea *cuarcilor* în protoni și neutroni, și de coeziunea lor în nucleele atomice. Ulterior, s-a descoperit că, în felul acesta, se obține de fapt o generalizare a ecuațiilor lui Maxwell pentru forța nucleară slabă, cea responsabilă pentru derintegrarea radioactivă: teorie numită *aromodinamică cuantică* (*quantum flavordynamics* – QFD), pentru că ține cont de așa-numitele „arome” (*flavors*) ale *cuarcilor*, care le-au adus lui Sheldon Glashow, Abdus Salam și Steven Weinberg Premiul Nobel pentru fizică în 1979. În plus, făcând produsul grupurilor $U(1)$ și $SU(2)$ se obține unificarea forțelor electromagnetice și nucleară slabă în așa-numita forță electroslabă.

Generalizarea corectă a ecuațiilor lui Maxwell pentru forța nucleară tare derivă, în schimb, din invarianța la renormare față de grupul $SU(3)$, care e o versiune mai complicată a lui $SU(2)$: teoria se numește *cromodinamică cuantică* (*quantum chromodynamics* – QCD), pentru că ține seamă de așa-numitele „culori” ale

unui grup comutativ notat $U(1)$: e grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul unitar.

Această simetrie fusese deja anticipată în 1867 pentru ecuațiile lui Maxwell clasice de danezul Ludwig Lorenz (care nu trebuie confundat cu olandezul Hendrik Lorentz, părintele omonimelor transformări relativiste). Însă cel care a formulat simetria de renormare în limbaj algebric a fost Hermann Weyl – tot el i-a subliniat importanța pentru teoriile unificate, în cartea *Teoria grupurilor și mecanica cuantică* (1928).

Ideea de a extinde ecuațiile lui Maxwell păstrându-le simetria de renormare, dar schimbând grupul în funcție de forța considerată, a fost propusă de Chen Ning Yang și Robert Mills în 1954. De atunci încolo, teoria grupurilor a devenit un instrument de bază în dezvoltarea fizicii teoretice. Saltul calitativ făcut de Yang și Mills a constatat în trecerea de la grupul comutativ $U(1)$ la cel necomutativ $SU(2)$: grupul multiplicativ al cuaternionilor unitari.

La început, Yang și Mills sperau să poată trata astfel forța nucleară tare, responsabilă pentru confinarea *cuarcilor* în protoni și neutroni, și de coeziunea lor în nucleele atomice. Ulterior, s-a descoperit că, în felul acesta, se obține de fapt o generalizare a ecuațiilor lui Maxwell pentru forța nucleară slabă, cea responsabilă pentru dezintegrarea radioactivă: teorie numită *aromodinamică cuantică* (*quantum flavordynamics* – QFD), pentru că ține cont de așa-numitele „arome” (*flavors*) ale *cuarcilor*, care le-au adus lui Sheldon Glashow, Abdus Salam și Steven Weinberg Premiul Nobel pentru fizică în 1979. În plus, făcând produsul grupurilor $U(1)$ și $SU(2)$ se obține unificarea forțelor electromagnetice și nucleară slabă în așa-numita forță electroslabă.

Generalizarea corectă a ecuațiilor lui Maxwell pentru forța nucleară tare derivă, în schimb, din invarianța la renormare față de grupul $SU(3)$, care e o versiune mai complicată a lui $SU(2)$: teoria se numește *cromodinamică cuantică* (*quantum chromodynamics* – QCD), pentru că ține seamă de așa-numitele „culori” ale



cuarcilor – aceasta le-a adus lui David Gross, Frank Wilczek și David Politzer Premiul Nobel pentru fizică în 2004. În plus, făcând produsul grupurilor $U(1)$, $SU(2)$ și $SU(3)$ se obțin ecuațiile lui Maxwell ale așa-numitului Model Standard.

Dacă matematica a pus la dispoziția fizicii instrumentele pentru generalizarea ecuațiilor lui Maxwell, fizica, la rândul ei, i-a întors matematicii serviciul. Într-adevăr, folosirea ecuațiilor invariante la grupul $SU(2)$ i-a permis lui Simon Donaldson să clasifice suprafețele topologice cu patru dimensiuni, ceea ce i-a adus Medalia Fields în 1986. Iar una dintre cele șapte probleme ale mileniului, cu un milion de dolari în joc, se referă la dificilul calcul exact al celei mai ușoare mase prezise de ecuațiile invariante la grupul $SU(3)$.

CHIMIE

LUCREȚIU, POET ȘI SAVANT

Atomii

Toată lumea știe că *De rerum natura* a lui Lucrețiu e o capodoperă a literaturii latine, dar puțini știu că este și o capodoperă de popularizare a științei. Hexametrii săi dactilici catalectici ascund, în spatele formeii poetice, un conținut care anticipează multe aspecte ale științei moderne – vom încerca să le recapitulăm aici.

Înainte de toate, versurile 54–61 din Cartea I constituie un rezumat al întregului poem și pot fi sintetizate într-un singur cuvânt de ordine: *reductionism*. Într-adevăr, Lucrețiu vrea să reducă funcționarea întregului macrocosmos, inclusiv omul, la comportamentul microscopic al acelor așa-numite *stoicheia*: cuvânt grecesc care înseamnă „înșiruite” sau „înseriate” și indică „elementele ultime” ale materiei. Să-l ascultăm:

Căci eu acum voi începe-a-ți spune
De-a cerului ș-a zeilor făptură,
Și-ți voi dezvălui ce sunt atomii,
Din care firea le urzește toate
Și spor le dă și hrană, și în care,
Când toate pier, le-ntoarce iar pe toate.
Când noi vorbim de ei, le zicem încă
„Materie” și „germeni” și „semințe”,
Ba-i mai numim pe ei și „corpuri prime”,
Căci toate sunt dintr-înșii zămislite.

Unul dintre obiectivele reducționismului e clasificarea acestor „corpuri prime” sau „elemente ultime”. Un altul, complementar, e descrierea felului în care se combină ele pentru a da naștere tuturor lucrurilor. Ambele obiective sunt asumate de Lucrețiu și de științele moderne deopotrivă, chiar dacă fiecare dintre acestea se limitează la a reduce un anumit nivel particular al realității la unul mai elementar. După caz, așadar, „elementele ultime” ale lui Lucrețiu pot fi văzute ca macromoleculele biologiei, ca moleculele chimiei, ca atomii fizicii atomice și nucleare, sau ca particulele elementare ale fizicii subatomice.

În mai multe pasaje ale poemului, Lucrețiu introduce o paralelă între atomismul fizic și atomismul lingvistic. Într-adevăr, în vremea lui, exemplul cel mai convingător de atomism nu din Natură venea, ci din scriere: întâi cea hieroglifică, apoi cea care folosește alfabetul. Platon recunoscuse încă din *Theaitetos* că tocmai literele și cuvintele fuseseră sursa lui de inspirație pentru elementele și mulțimile care stau la baza teoriei sale a ideilor. Iar cele două procedee ale sale, de sinteză și analiză, corespund compunerii literelor în cuvinte și descompunerii cuvintelor în litere.

Și Lucrețiu indică literele și cuvintele drept inspirație pentru atomii și compușii care stau la baza teoriei lui Epicur, modelul său. A trebuit însă să treacă un mileniu și jumătate pentru ca intuițiile filozofice să devină teorii științifice: într-adevăr, atomismul va scoate capul în știință abia în 1661, odată cu *Chimistul sceptic* al lui Robert Boyle, și o va cuceri abia în 1808, cu *Un nou sistem de filozofie chimică* al lui John Dalton.

Însă nu doar generalitățile sunt moderne la Lucrețiu. Modernă e și o lungă listă de particularități care se constituie în veritabile anticipări ale unor momente remarcabile din dezvoltarea științei: spațiul infinit al lui Giordano Bruno, principiul de inerție al lui Descartes, vidul lui Torricelli, legea de conservare a masei a lui Lavoisier, epidemiologia lui Borelli, evoluționismul lui Darwin și teoria cinetică a gazelor a lui Maxwell – ca să nu cităm decât câteva dintre ele. De altfel,

însuși Maxwell spunea într-o scrisoare din 1866: „Cuvintele lui Lucrețiu sunt o atât de bună ilustrare a teoriei moderne, încât ar fi păcat să însemne altceva.“

Ca să dăm un exemplu surprinzător, să citim, de exemplu, versurile 129–131 din Cartea a II-a:

Tu se cuvine încă și de-aceea
Să iei în seamă bine-acești corpusculi,
Pe care-i vezi cu ochii cum se mișcă
Neconținut în raza cea de soare,
Fiindcă astfel de mișcări dezvăluie
Mișcările materiei, ascunse
și nevăzute: din acești corpusculi
Tu vei vedea că mulți își schimbă drumul,
Mânați fiind de lovituri ascunse,
Și că, respinși, ei se întorc din cale
Când ici, când dincolo, în toate părțile.

Chiar dacă incorectă în privința mișcării prafului atmosferic, care nu fluctuează în aerul nemișcat, fiind, dimpotrivă, târât de curenți, explicația lui Lucrețiu rezolvă corect enigma mișcării descoperite de Robert Brown în 1827 și explicată în manieră „lucrețiană“ de Einstein în 1905: mișcarea vizibilă a particulelor macroscopice e într-adevăr provocată de mișcarea invizibilă a moleculelor fluidului care le lovesc¹, dovadă a profunzimii intuițiilor științifice din poemul lui Lucrețiu.

CHIMIA LUI PLATON

Cele patru elemente

Chimia anticilor nu era prea sofisticată, mai ales în ce privește identificarea elementelor fundamentale. Printre moniști, Thales privilegia apa, Anaximene aerul, Xenofon pământul și Heraclit

1. Vezi secțiunea „Plimbări matematice“.

focul. Cât despre pluraliști, ecumenicul Empedocle le considera și reconsidera pe toate patru.

În realitate, nici unul dintre cele patru elemente ale Antichității nu a rezistat „probei focului“. Apa s-a dovedit un compus din doi atomi de hidrogen și unul de oxigen. Pământul și aerul sunt amestecuri de multe elemente: mai ales siliciu (60%) pentru primul, azot (75%) și oxigen (20%) pentru al doilea. Iar focul e un proces, nu un element.

E o doză de ironie aici, pentru că, încă mult înaintea grecilor, fuseseră izolate numeroase elemente diferite, vreme îndelungată nerecunoscute ca atare. Primele au fost aurul și bronzul care se extrăgeau cu 5.000 de ani înaintea erei noastre în Anatolia și Asia. A urmat plumbul, topit din mineralele sale pe la 3500 și intrat în uzul comun cam după un mileniu. Apoi staniul și fierul, descoperite în Persia, între 1800 și 1600, respectiv în Anatolia, către 1400.

Dacă vrem să fim generoși, ce rămâne azi din teoriile presocraticilor e intuiția primordială a ceva profund. Erwin Schrödinger și Werner Heisenberg au sugerat, în cărțile lor *Natura și grecii* (1948), respectiv *Fizică și filozofie* (1958), că acele patru elemente (apa, aerul, pământul și focul) ar trebui considerate metafore ale stărilor lichidă, aeriformă și solidă, și a energiei care permite transformarea uneia în altele: în particular, gheața în apă și apa în vapori.

Mai mult, Heisenberg vedea în *Timaios*, dialog platonice de inspirație pitagoreică, o primă prefigurare norocoasă a structurii atomice a apei. Într-adevăr, Platon asociază fiecărui element un poliedru regulat: octaedrul aerului, cubul pământului, icosaedrul apei și tetraedrul focului. Observă apoi că icosaedrul, cu douăzeci de fețe triunghiulare, se poate sintetiza compunând cele șaisprezece fețe a două octaedre cu cele patru ale unui tetraedru, deducând de aici că apa e compusă din două părți de aer și una de foc: adică, sugerează Heisenberg generos, H_2O .

Azi, geometria face parte dintre instrumentele de lucru ale chimistului teoretician, chiar dacă natura s-a dovedit a fi mai

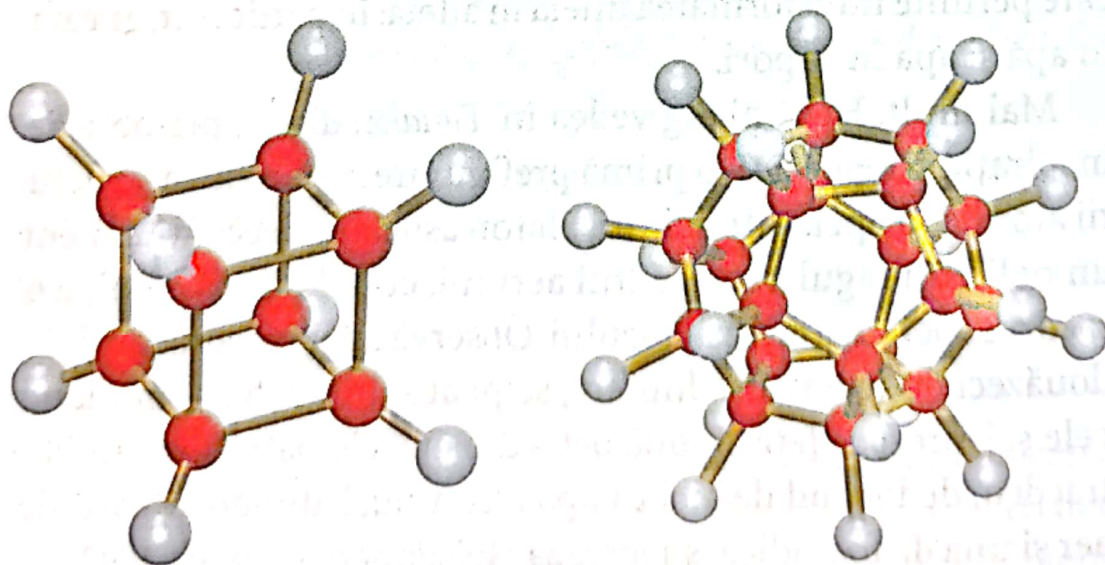


Chimia platoniciană: foc, pământ, aer, univers și apă

puțin platoniciană decât își imaginau clasicii și neoclasicii. Ceea ce nu înseamnă că, din când în când, moleculele nu furnizează proprietăți surprinzătoare de regularitate „grecească”.

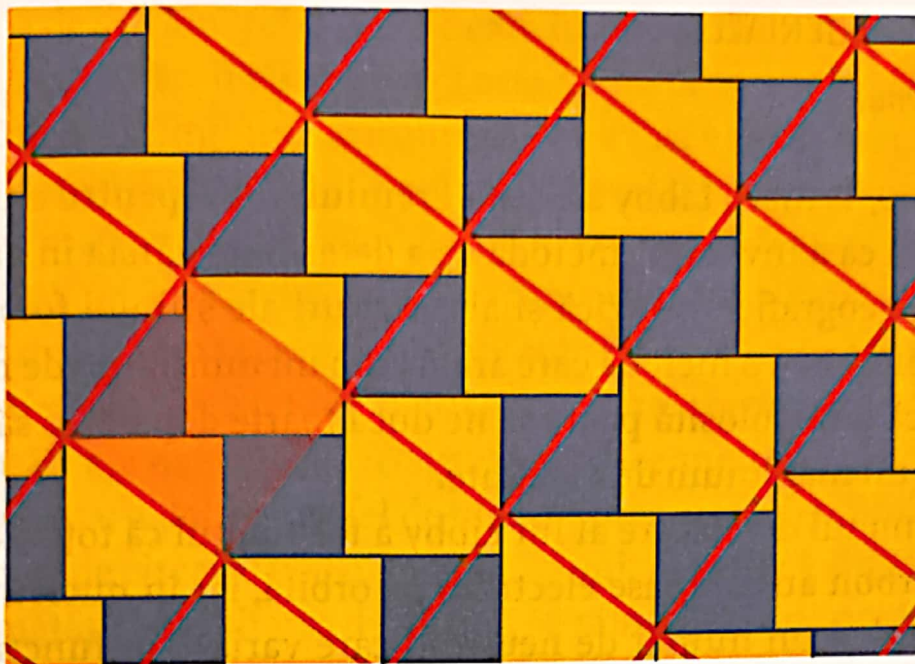
Unul dintre cei mai eficienți cercetători și popularizatori ai aspectelor geometrice ale moleculelor e Roald Hoffmann, Premiul Nobel în 1981. De exemplu, într-un capitol din cartea sa *Același și diferit*¹ povestește cum a fost sintetizat în laborator cubanul C_8H_8 , o moleculă cu opt atomi de carbon plasați în vârfurile unui cub și opt de hidrogen, legați de primii. Alte hidrocarburi platoniciene sintetizate sunt tetraedranul C_4H_4 și dodecaedranul $C_{20}H_{20}$, analoge ale tetraedrului și dodecaedrului. Motive structurale împiedică însă formarea octaedranului C_6H_6 și a icosaedranului $C_{12}H_{12}$, analogele octaedrului și icosaedrului.²

Cât despre geometria geacă, nimic nu pare totuși să se apropie de structura descrisă de Hoffmann într-o colecție de



1. *The same and not the same*, Columbia Univ. Press, 1995.

2. Vezi secțiunea „Afinități deductive”.



articole, *Filozofia, arta și știința chimiei*¹. E vorba despre compusul tridimensional $\text{Cs}_3\text{Te}_{22}$, din cesiu și telur, în care atomii de telur sunt dispuși în două moduri diferite: două inele de Te_8 și un pavaj bidimensional format cu dale de Te_6 . Inelele sunt neutre, iar pavajul e ținut laolaltă de interacțiunile ionice cu cesiul.

În legătură cu pavajul, Hoffmann îl citează pe Escher, dar realitatea e încă și mai surprinzătoare. Este, de fapt, vorba despre o demonstrație prin disecție a teoremei lui Pitagora, descoperită de arabilul Thābit ibn Qurra în secolul IX și redescoperită de matematicianul olandez Frans van Schooten în secolul XVII. Demonstrația se bazează pe faptul că atomii de telur formează un pavaj al planului cu două pătrate, care pot fi gândite ca fiind cele construite pe catetele unui triunghi dreptunghic, în timp ce atomii de cesiu formează un pavaj cu un singur pătrat, care poate fi considerat cel construit pe ipotenuza aceluiasi triunghi.

După cum se vede, geometria greacă are mult mai mult de-a face cu chimia decât și-au putut imagina Pitagora și Platon – poate și decât mulți matematicieni și chimiști moderni.

1. *On the philosophy, art, and science of chemistry*, Oxford University Press, 2012.

În 1960, Willard Libby a primit Premiul Nobel pentru chimie pentru că a inventat „metoda de a determina vârsta în arheologie, geografie, geofizică și alte ramuri ale științei folosind carbonul 14”: o metodă care arată cum un minimum de matematică bine folosită poate să ne ducă foarte departe și să producă un maximum de rezultate.

Punctul de plecare al lui Libby a fost faptul că toți atomii de carbon au câte șase electroni pe orbită, iar în nucleu șase protoni și un număr de neutroni care variază în funcție de izotop. Izotopii cei mai obișnuiți în natură sunt desemnați cu numerele 12, 13 și 14, fiind caracterizați de prezența a șase, șapte și opt neutroni în nucleu, pe lângă cei șase protoni. Dar în timp ce izotopii 12 și 13 sunt stabili, izotopul 14 e radioactiv și se dezintegrează spontan.

Cei trei izotopi sunt prezenți în atmosferă în proporții cunoscute: de exemplu, la fiecare o mie de miliarde de atomi de carbon 12, există unul singur de carbon 14. Organismele vii absorb diferiții izotopi prin fotosinteză și hrană, în concentrații proporționale cu cele din atmosferă. După moarte însă, absorbția încetează, iar carbonul 14 se dezintegrează, așa că măsurând concentrația acestuia din urmă putem măsura timpul scurs de la moartea organismului respectiv – cu condiția să știm care e viteza de dezintegrare a carbonului 14 și presupunând concentrația lui actuală egală cu cea din trecut.

În 1949, Libby a măsurat timpul de înjumătățire al carbonului 14 la 5.568 de ani, cu o eroare de plus sau minus 30. Ca să-și testeze metoda, s-a dus în Egipt și a datat o așchie de salcâm care provenea de la mormântul faraonului Djoser, din dinastia a III-a: era deci ceva despre care se știa că are o vechime de circa 2.700 de ani. Dacă timpul de înjumătățire al carbonului 14 era într-adevăr cel estimat, concentrația sa în

așchia de salcâm trebuia să fie cam jumătate din concentrația găsită în salcâmi vii – și exact asta a constatat.

Calculul timpului de înjumătățire a fost verificat și cu alte măsurători de control și s-a dovedit esențialmente corect (valoarea măsurată azi e 5.730 de ani, cu o eroare de plus sau minus 40). În consecință, și concentrația carbonului 14 în atmosferă a rămas esențialmente constantă în trecutul recent (azi știm că au existat fluctuații temporare, acestea necesitând calibrări ale datărilor). De-atunci încolo metoda a fost folosită pentru a data orice fel de obiecte organice, cu o limită de aplicare de circa 50.000 ori 60.000 de ani, pentru că, după zece înjumătățiri, cantitatea de carbon 14 rămasă devine prea mică pentru măsurări semnificative.

Un exemplu asemănător de aplicare a unei matematici simple pentru datare e metoda inventată în 1968 de Motoo Kimura pentru a estima momentul separării a două specii, deci și vârsta ultimului lor strămoș comun.

Punctul de plecare al lui Kimura a fost intuiția că majoritatea schimbărilor evolutive nu sunt adaptative, ci neutre: altfel spus, ele survin nu pentru că le-ar favoriza selecția naturală, ci din întâmplare. Așa sunt, de exemplu, modificările „sinonime” în codonii codului genetic: acele modificări de bază, deci, care fac trecerea la codonul care codifică un aminoacid la codonul care codifică același aminoacid. În acest caz, modificarea nu alterează funcționarea proteinelor și nu produce nici un avantaj evolutiv: dacă e selecționat, se dovedește a fi neutru.

Acum, să presupunem că avem o populație de n indivizi, fiecare cu două perechi de cromozomi și de gene și că probabilitatea unei mutații neutre a unei anumite gene este p . La fiecare generație vor fi $2np$ mutații neutre, fiecare cu aceeași probabilitate de a se fixa: cum perechile de gene sunt $2n$, probabilitatea de a se fixa a fiecărui mutant neutru e $\frac{1}{2n}$. Numărul mutațiilor neutre care se fixează este deci $2np$ înmulțit cu $\frac{1}{2n}$, adică p : altfel spus, numărul de mutații neutre ale unei gene

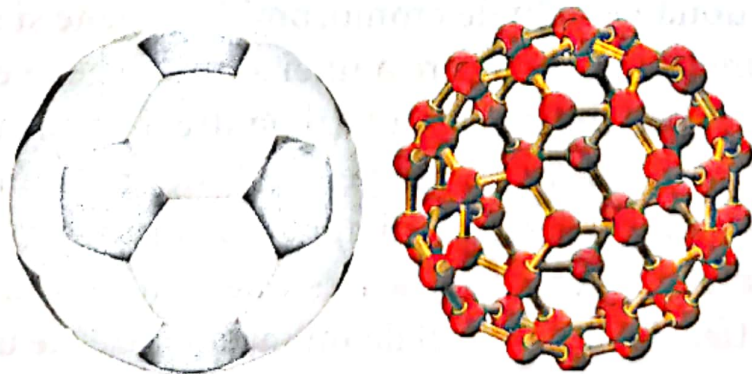
care se fixează la fiecare generație este egal cu probabilitatea ca ea (gena) să se mute în manieră neutră, independent de mărimea populației!

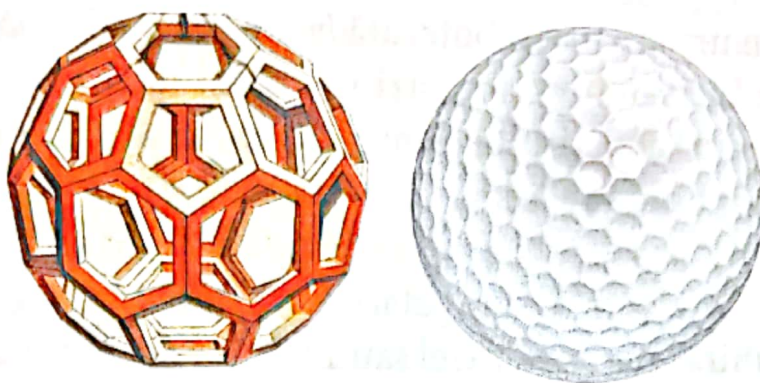
Dacă probabilitatea de mutație pentru o genă e azi aceeași ca în trecut, din numărul de mutații neutre ale unei gene care s-au fixat într-o specie, comparat cu altă specie, putem calcula numărul de generații care s-au scurs de la momentul separării lor, fără să ținem cont de mărimea populației de plecare a ultimilor strămoși comuni. Geneticienii au putut astfel să reconstruiască arborele genealogic al speciilor în viață și să rescrie o versiune modernă a *Evangheliei după Luca*, unde se povestește evoluția organismelor actuale plecând de la ultimul strămoș comun universal: anume, chiar LUCA, adică „Last Universal Common Ancestor“.

MINGI ȘI CUPOLE

Fulerena

Toți, chiar și cei refractari la sportul național italian, au văzut în viața lor o *minge de fotbal*. Un obiect interesant și sofisticat care, în loc să fie luat la șuturi, ar merita observat cu admirație și respect. În primul rând, pentru numele celui care l-a inventat: nimeni altul decât Arhimede, cel mai mare matematician al Antichității și unul dintre cei mai mari din toate timpurile. Apoi, pentru structura peticelor care o compun: 20 de hexagoane albe și 12 pentagoane negre care se întâlnesc în 60 de vârfuri.





Cu mult înainte de a fi folosită pe terenul de fotbal însă, mingea asta a fost inventată de natură, care o atribuiască moleculei C_{60} , obținută punând 60 de atomi de carbon în vârfurile ei: descoperirea le-a adus Premiul Nobel pentru chimie, în 1996, lui Robert Curl, Harold Kroto și Richard Smalley. În secolul III înainte de erea noastră, Arhimede a reinventat mingea, în studiul său asupra *poliedrelor semiregulate*, compuse din fețe regulate nu neapărat egale între ele. Iar în 1414, Leonardo a desenat-o – una dintre ilustrațiile la cartea *Divina proporție* a prietenului său Luca Pacioli.¹

Mai puțin cunoscută decât mingea de fotbal, pentru că e folosită într-un sport mai puțin popular, este mai recenta *minge de golf*. A brevetat-o William Taylor, în 1905, apoi însă au existat multe variații. Tema comună reclamă dispunerea regulată a câtorva sute de gropițe circulare ale căror margini determină o subdiviziune a sferei în hexagoane, la fel ca în faguri, cu strania excepție a douăsprezece pentagoane.

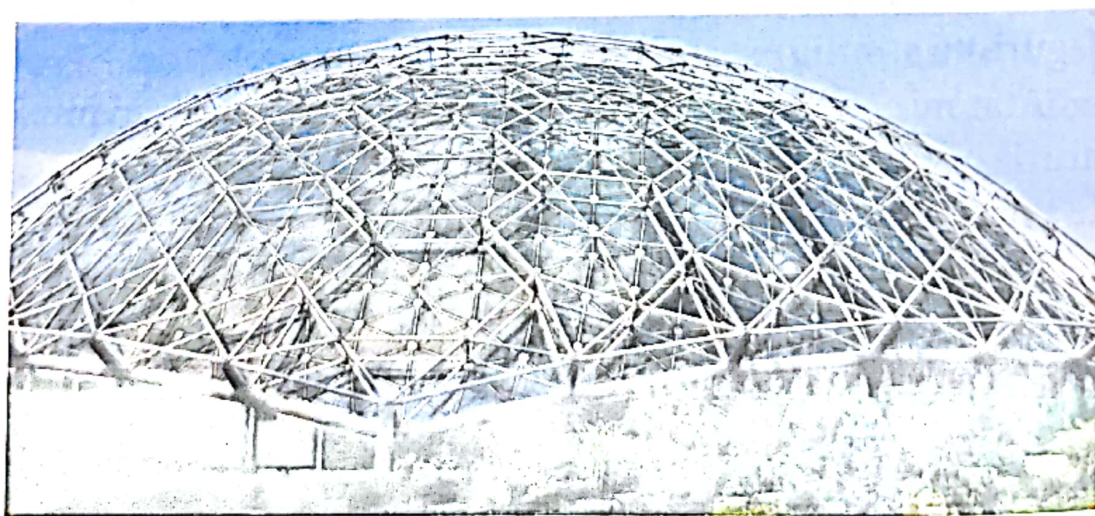
Atât mingea de fotbal, cât și cea de golf sunt versiuni miniaturizate ale cupolelor geodezice cu fețe triunghiulare pe care le-a făcut populare arhitectul Richard Buckminster Fuller, care le-a brevetat în 1954. Azi, există unele de dimensiuni enorme, până la diametre de două sute de metri, mai ales în Statele Unite și în Japonia, toate având o aceeași structură hexagonală, întreruptă sporadic de asimetrii pentagonale. Pentru a sublinia analogia dintre cupolele lui Buckminster Fuller și molecula C_{60} ,

1. Vezi secțiunea „Proporția divină“.

aceasta din urmă a fost rebotezată *buckminster fulerenă*, ori, mai simplu, *fulerenă*, chiar dacă azi numele indică, mai general, orice moleculă constituită numai din atomi de carbon dispuși în manieră hexagonală și pentagonală.

Pe de altă parte, o dispunere regulată de triunghiuri pe o sferă corespunde unei triangulări a unui poliedru regulat. Nu-i așadar de mirare că, într-un fel sau altul, apare numărul doisprezece: într-adevăr, dodecaedrul are douăsprezece fețe, iar icosaedrul douăsprezece vârfuri, în fiecare întâlnindu-se câte cinci fețe triunghiulare. În schimb, e mai surprinzător că în nici o triangulare a sferei nu se pot întâlni decât exact douăsprezece fețe sau vârfuri pentagonale.

Explicația misterului o dă *caracteristica lui Euler*¹, descoperită de el în 1750. E vorba despre cunoscuta formulă $V - L + F = 2$ care leagă între ele numărul de vârfuri, de laturi și de fețe ale unui poliedru sferic (mai general, convex). În cazul unui poliedru sferic cu p fețe pentagonale și h fețe hexagonale, primele contribuie cu $5p$ laturi, celelalte cu $6h$ laturi, și cum fiecare latură e numărată de două ori, L va fi egal cu jumătate din $5p + 6h$. Cât despre vârfuri, să presupunem că în fiecare se întâlnesc exact trei laturi: atunci V este o treime din aceeași sumă. Înlocuind în formula lui Euler și rezolvând ecuația rezultată, se obține $p = 12$.



1. Vezi secțiunea „Un orb vizionar“.

Altfel spus: dacă fețele unui poliedru sunt doar pentagonale ori hexagonale și dacă în fiecare vârf se întâlnesc exact trei fețe, atunci există în mod necesar exact 12 fețe pentagonale. La fel se arată că, dacă toate fețele unui poliedru sunt triunghiuri și în fiecare vârf se întâlnesc numai cinci sau șase laturi, atunci există exact 12 vârfuri în care se întâlnesc cinci. Ceea ce explică nu numai structura mingilor de golf și de fotbal, dar și structura moleculelor închise de fulerenă, compuse din atomi de carbon dispuși în manieră pentagonală și hexagonală.

Și, evident, pe a cupolelor geodezice. Chiar dacă, în general, ele nu sunt închise, ca sferele, ci sunt doar emisferice și, deci, avem mai puțin de 12 puncte pentagonale, privind atent vom descoperi câteva, mărturie tăcută a legilor matematice în fața cărora trebuie să se încline nu doar fotbaliștii și chimiștii, dar și arhitecții.

NOBIL OMAGIU HEXAGONULUI

Benzenul

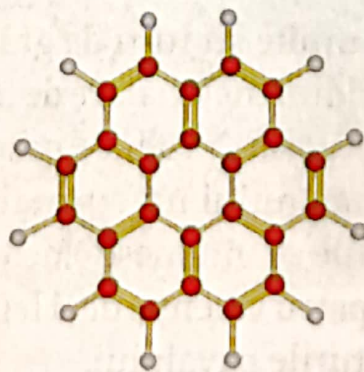
Nu doar omul, ci și natura folosește masiv pavajele, mai mult sau mai puțin regulate. Cea mai cunoscută e cu siguranță aceea hexagonală și regulată realizată de albine pentru construcția fagurilor. Dar Premiul Nobel pentru fizică primit de Andre Geim și Konstantin Novoseliov în 2010 a atras atenția asupra *grafenului*: un strat bidimensional de atomi de carbon, dispuși chiar în formă de fagure, constituind cărămida principală a tot felul de compuși.

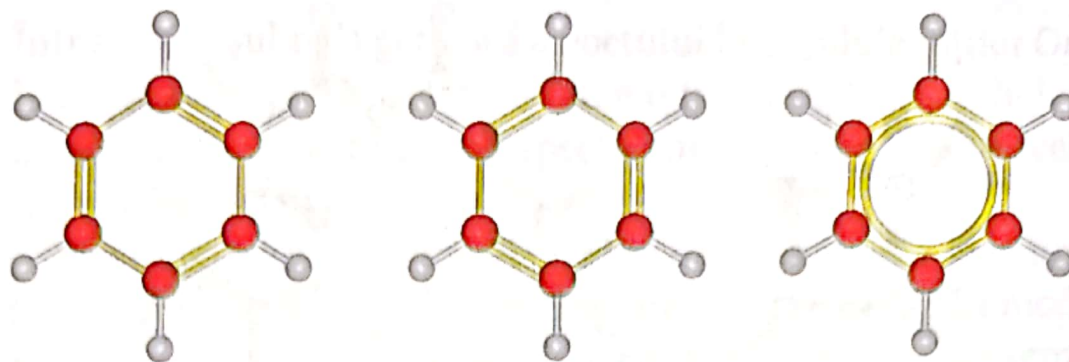
Pe de o parte, mai multe straturi de grafen puse unul peste altul produc *grafitul* tridimensional. Pe de altă parte, un strat de grafen, înfășurat în jurul său, produce *nanotuburi* unidimensionale. Dar structura grafenului nu e banală, pentru că într-un pavaj hexagonal laturile se întâlnesc câte trei în fiecare vârf, în timp ce carbonul are patru valențe: deci legăturile dintre atomi nu se reduc doar la laturile pavajului.



În realitate, grafenul poate fi gândit ca un caz-limită de structuri hexagonale din ce în ce mai mari, cea mai simplă fiind *coronenul* (zis și *superbenzen*). Aceasta e o hidrocarbură aromatică, se găsește în mod natural în carpatită și e produsă artificial în rafinarea petrolului. Structura sa ($C_{24}H_{12}$) e formată din 24 de atomi de carbon, dispuși sub forma a două hexagoane alăturate în inel, și din 12 atomi de hidrogen agățați în vârfuri.

La rândul său, coronenul poate fi gândit ca un inel format din șase molecule de *benzen*: altă hidrocarbură aromatică, constituent al petrolului. Structura sa (C_6H_6) e formată din 6 atomi de carbon dispuși în formă de hexagon, cu 6 atomi de hidrogen agățați în vârfuri.



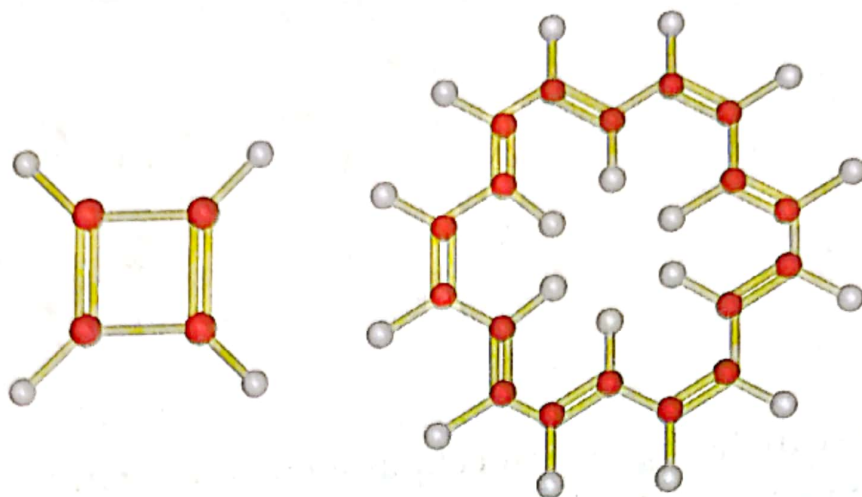


În fiecare hexagon sunt cel puțin două realizări teoretice ale structurii. În 1865, Arthur Kekulé a intuit că benzenul nu preferă nici una din ele și „oscilează” între ele. Astăzi, am spune mai degrabă că electronii responsabili pentru legăturile duble sunt delocalizați, iar sistemul e în rezonanță.

Povestea descoperirii structurii hexagonale a benzenului e printre cele mai cunoscute și repetate din știință – a fost spusă chiar de Kekulé în 1890:

Eram așezat, voiam să scriu, dar nu-mi ieșea: gândurile îmi zburau aiurea. Mi-am întors scaunul către cămin și am ațipit. Atomii îmi jucau în fața ochilor și grupul cel mic rămăsese, modest, mai în spate. Ochiul minții, pe care vi-ziunea asta repetată îl făcuse mai ager, putea distinge structuri mai mari de forme multiple: șiruri lungi, uneori înghesuite, toate curbate sinuos asemenea mișcării unui șarpe. Ia te uită! Ce se întâmplă? Unul dintre șerpi își mușcase coada, iar forma asta se învârtea în bătaie de joc în fața ochilor mei. M-am trezit fulgerător și mi-am petrecut restul nopții elaborându-mi ipoteza.

Evident, trimiterea poetică la miticul *ouroboros* e făcută tocmai ca să atragă atenția. Dar rolul șarpelui era, de fapt, să mascheze o minciună: prozaicul adevăr este că în 1984 au ieșit la iveală o scrisoare din 1854 și o publicație din 1858 în care Kekulé cita structura hexagonală care fusese deja propusă pentru clorura de benzoil, în *Metode de chimie* (1854), de Auguste Laurent.



Oricum, atracția pentru structura benzenului rămâne, oricine ar fi descoperit-o. Iar pentru noi, în particular, provine din faptul că ea realizează în mod chimic un poligon regulat. Nu e însă unicul exemplu de structură chimică în poligon regulat: dimpotrivă, poate că cel mai simplu e *ciclobutadienul* (C_4H_4), cu 4 atomi de carbon dispuși în vârfurile unui pătrat. Mai general, există *anulenele*.

Cât despre grafen, pavajul lui hexagonal e cea mai apropiată realizare fizică a planului euclidian. Grosimea sa e redusă la aceea a unui singur atom de carbon, plus norul de electroni de localizați, tipic pentru compușii aromatici: cam a cincisprezecea parte dintr-un nanometru, adică șapte milioane de straturi de felul acesta încap într-un milimetru. Dincolo de asemenea subțirimi se poate ajunge într-un singur mod: să părăsim lumea aceasta și să ne dematerializăm în matematica pură.

AFINITĂȚI DEDUCTIVE

Hidrocarburi și carborani

Afinități elective (1809), de Goethe, este îndeobște evocată cu entuziasm drept mărturie pentru *mysterium coniunctionis* dintre literatură și chimie – cartea nu e, de fapt, decât o indigestă goaoșă romantică și alchimică, umplută cu banalități antiștiințifice.

Într-adevăr, şubreda genetică a poetului le îngăduie soţilor Orlando şi Carlotta să aducă pe lume o fiică fără trăsăturile lor somatice, dar cu acelea ale respectivilor lor amanţi (la care cei doi se gândeau în momentul conceperii)!

Nu e greu să găsim lucruri mai bune decât comicul involuntar al lui Goethe în alte opere literare care dezvăluie în mod subtil, nu direct declarativ, afinităţi elective cu chimia: de exemplu, *De rerum natura*, al lui Lucreţiu¹, *Mică cosmogonie portativă*², a lui Raymond Queneau, *Sistemul periodic*^{*}, al lui Primo Levi, *Parfumul*^{**}, de Patrick Süskind etc. Dar cele mai bune exemplare sunt de observat în stare pură, în acea mină fără fund de literatură fantastică – anume, filozofia, de la *Timaios* al lui Platon şi până la *Tratatul logico-filozofic*^{***5} al lui Ludwig Wittgenstein.

În particular, în dialogul platonician apare un veritabil manifest programatic al chimiei moderne.³ E vorba despre ideea că toate corpurile sunt constituite din molecule, fiecare având o structură geometrică bine definită. În plus, moleculele se pot combina şi desface din combinaţii în urma a două procese complementare, de sinteză şi analiză, guvernate de legi matematice precise.

Evident că, ulterior, structura geometrică a moleculelor s-a dovedit mult mai complexă decât o credea Platon, redusă la cele cinci poliedre regulate. Astăzi, geometria chimică, sau chimia geometrică, se întreabă dacă nu cumva e adevărat contrariul: dacă există în natură, sau dacă se pot sintetiza în laborator, molecule chimice cu exact structura poliedrelor platonice. Şi răspund după cum urmează.

Exemple de tetraedre „dezbrăcate” sunt fosforul alb (P_4) şi arsenicul galben (As_4). Tetraedrul, cubul şi dodecaedrul se pot

1. Vezi secţiunea „Lucreţiu, poet şi savant”.

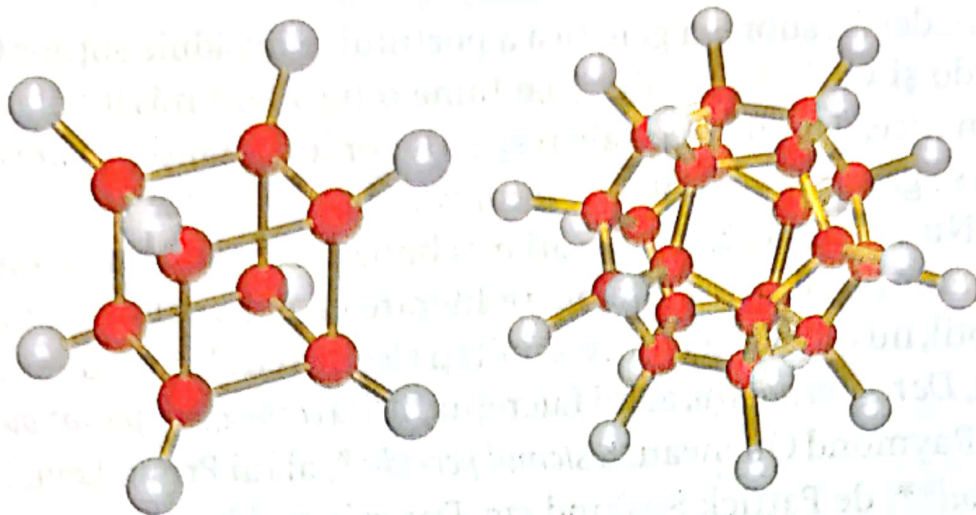
2. *Petite cosmogonie portative*, Gallimard, Paris, 1950.

* Art, Bucureşti, 2019 (n. tr.).

** Humanitas, Bucureşti, 2016 (n. tr.).

*** *Tractatus logico-philosophicus*, Humanitas, Bucureşti, 1991 (n. tr.).

3. Vezi secţiunea „Chimia lui Platon”.



obține „îmbrăcate“ folosind *hidrocarburi* (compuși de carbon și hidrogen) numite tetraedran (C_4H_4), cuban (C_8H_8) și dodecaedran ($C_{20}H_{20}$), în care atomii de carbon sunt plasați în vârfurile poliedrelor respective, cu câte un atom de hidrogen atârând de fiecare dintre ei. Tetraedranul n-a fost încă obținut, dar cubanul a fost sintetizat în 1964 de Philip Eaton și Thomas Cole, iar dodecaedranul în 1982, de Leo Paquette.

Dezbrăcând de hidrogen dodecaedranul, Horst Prinzbach a obținut în 2000 un dodecaedru „dezbrăcat“ (C_{20}), care e cea mai mică *fulerenă* posibilă.¹ În schimb, octaedrul și icosaedrul nu se pot obține ca molecule organice, din cauza proprietăților carbonului, dar există sub formă de *carborani* (compuși de carbon, bor și hidrogen), în diferiți izomeri „îmbrăcați“ ($B_4C_2H_6$ și $B_{10}C_2H_{12}$).

În rezumat, poliedrele regulate au fost inventate de matematică, mitologizate de filozofie, realizate de natură și sintetizate de chimie. Întâmplările prin care au trecut ne duc cu gândul la palatul lui Kublai Han, proiectat de un împărat mongol și visat de un poet englez, pe care Borges se încumetă să-l interpreteze în povestirea *Visul lui Coleridge* (1952)*: „Poate că în lume își face treptat intrarea un arhetip care încă n-a fost

1. Vezi secțiunea „Mingi și cupole“.

* În *Opere*, vol. 3, Univers, București, 2000 (n. tr.).

revelat oamenilor, un obiect etern.“ Poate că exact asta sunt ideile matematice: prefigurări ale unor arhetipuri cu care se amuză filozofii și pe care istoria se însărcinează să le realizeze progresiv în universul natural și artificial.

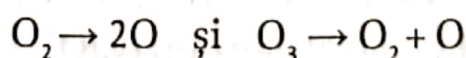
Și poate că, în cazul discutat, arhetipul a și intrat în lume. Într-adevăr, în 1926, Erwin Schrödinger a condensat întreaga chimie într-o ecuație care realizează mai bine și în mai mare măsură decât orice vers definiția mării poezii ca „limbaj încărcat cu semnificație în cel mai înalt grad“, dată de Ezra Pound în *ABC-ul lecturii* (1934).^{*} De altfel, ce poate fi mai plin de semnificații decât un șir de simple simboluri care conține întreaga chimie? Și unde i-ar sta mai bine decât într-o antologie de poezie în care, prin contrast, ar străluci deasupra versurilor poezilor, în *primis* celor ale lui Goethe?

ECUAȚIA GĂURII

Ozon

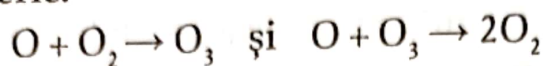
Cum reacțiile chimice sunt procese în care se schimbă compușii, dar se păstrează constituenții atomici, e natural ca reacțiile să fie descrise prin ecuații. Cu excepția reacțiilor reversibile, e însă necesar să indicăm și direcția temporală. Așa că ecuațiile chimice se scriu, în general, sub forma unor reguli de transformare similare celor folosite în informatică sau lingvistică, înlocuind semnul egal cu o săgeată.

Un exemplu simplu sunt ecuațiile descoperite în 1930 de Sydney Chapman, care descriu ciclurile oxigenului atmosferic (O_2) și ozonului (O_3). Într-una din direcții, lumina ultravioletă poate disocia oxigenul liber (O) atât din oxigenul atmosferic, cât și, mai ușor chiar, din ozon:

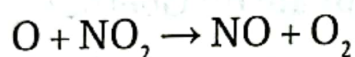


^{*} În *Opere II*, Humanitas, București, 2019 (n. tr.).

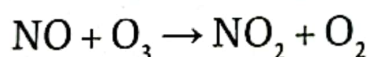
Invers, oxigenul liber se poate asocia cu oxigenul atmosferic producând ozon, sau poate disocia ozonul pentru a produce oxigen atmosferic:



Deoarece reacțiile de distrugere a ozonului sunt mai lente decât cele de creare a lui, aceste ecuații prezic o cantitate de ozon în atmosferă superioară celei efectiv observate: de unde concluzia că teoria lui Chapman e incompletă. Într-adevăr, în 1970, Paul Crutzen a descoperit că unul dintre ingredientele lipsă e oxidul de azot, care nu fusese luat în considerare. Întâi de toate, oxigenul liber poate disocia dioxidul de azot (NO_2), producând monoxid de azot (NO):

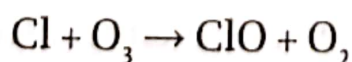


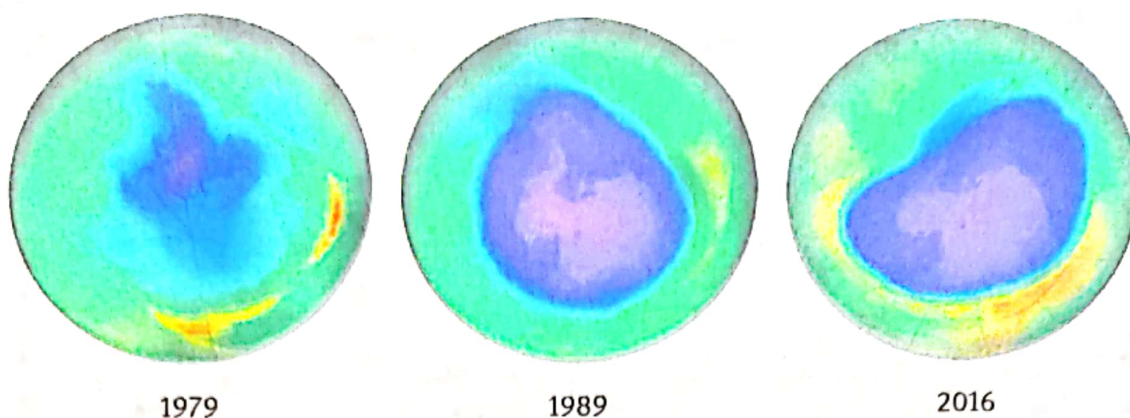
Iar monoxidul de azot poate distruge ozonul, producând alt dioxid:



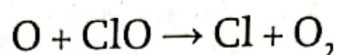
Vestea bună e că viteza acestor reacții prezice o cantitate de ozon în atmosferă de ordinul de mărime observat. Vestea proastă e că ecuațiile lui Crutzen descriu o posibilă reacție în lanț de distrugere a ozonului, bazată pe dioxid de azot. Care, așa cum a descoperit Crutzen, se produce în mod natural în stratosferă, prin oxidarea protoxidului de azot (N_2O), sau gazul ilariant – acesta din urmă, produs în troposferă de bacteriile din sol, pe de o parte, și de fertilizanți, pe de altă parte.

Cum se știe însă, o veste proastă nu vine niciodată singură. În 1974, Sherry Rowland și Mario Molina au descoperit o a doua reacție în lanț posibilă pentru distrugerea ozonului, de data asta bazată pe clor (Cl), încă mai eficace decât precedentă. În primul rând, clorul poate distruge complet ozonul, producând hipoclorit, un oxid al clorului (ClO):





Oxigenul liber rezultat poate disocia hipocloritul, producând din nou clor:



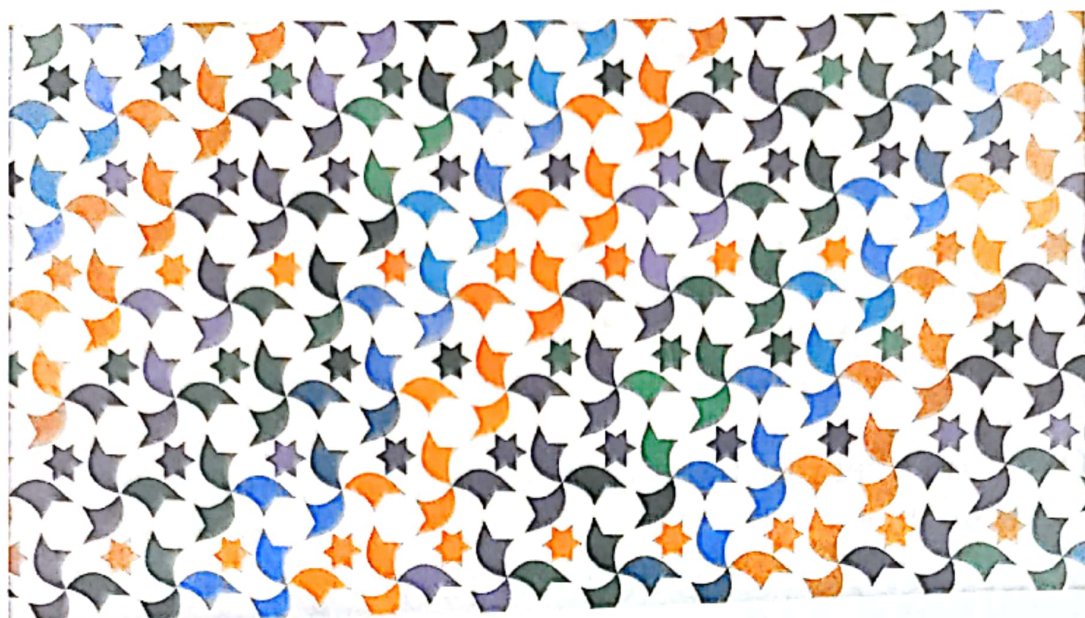
Dar cum poate ajunge clorul în stratosferă? Simplu, în urma disocierii produse de obișnuita lumină ultravioletă, de clorofluorocarburile folosite în dozele de spray, în frigidere și aparate de aer condiționat și ca agenți de spumare în producția polistirenului. Iar unul dintre efectele clorului e faimoasa *gaură de ozon* descoperită în 1985 deasupra Antarcticii de Brian Gardiner, Joe Farman și Jonathan Shanklin.

Aceste simple ecuații de mai sus au contribuit la stimularea conștiinței ecologice în țările industrializate care, prin protocolul de la Montréal din 1987, au interzis folosirea clorofluorocarburilor și a altor substanțe periculoase pentru ozon, și le-au adus lui Crutzen, Rowland și Molina Premiul Nobel pentru chimie în 1995. Iată cum, uneori, chiar și un minimum de matematică te poate duce foarte departe.

UN NOBEL APROAPE CRISTALIN

Cvasicristale

În 1891, cristalograful rus Evgraf Feodorov a demonstrat că există exact 17 tipuri de mozaicuri care admit doar simetriile rotaționale derivate din pavajele regulate ale planului (cu triunghiuri,

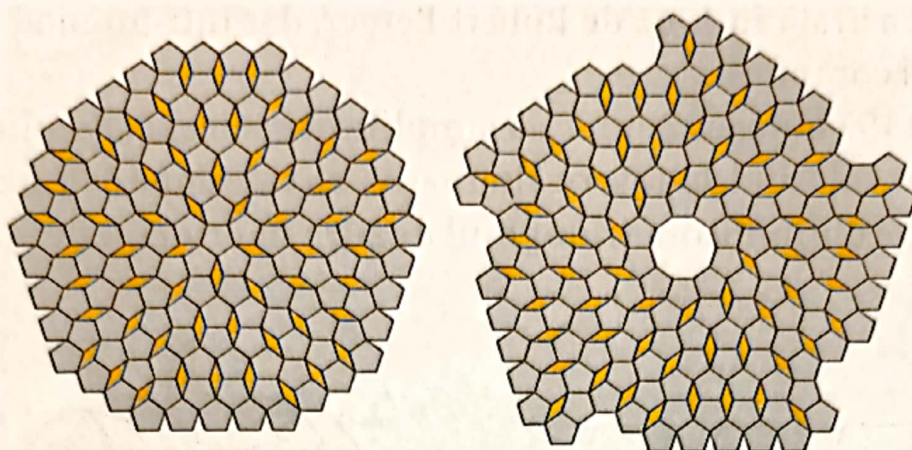


pătrate și hexagoane): deci cele corespunzătoare unghiurilor de 60, 90, 120 și 180 de grade, la dreapta sau la stânga. În mod surprinzător, aproape toate cele 17 tipuri au fost folosite în frescele egiptene ale mormintelor din Valea regilor și în decorațiile maure din Alhambra.

Feodorov a demonstrat în mod asemănător și că există exact 230 de tipuri de cristale. Și cum cristalele au simetrii planare în cele trei direcții spațiale, rotațiile posibile care le lasă invariante nu pot fi decât aceleași 17 tipuri de mozaicuri, corespunzând aceluiași unghiuri.

În 1984 însă, cristalograful israelian Daniel Shechtman a descoperit un aliaj de aluminiu și mangan a cărui structură moleculară prezintă simetrie pentagonală, corespunzătoare unui unghi de 108 grade: descoperire într-atât de surprinzătoare și neașteptată, încât i-a adus lui Shechtman Premiul Nobel pentru chimie în 2011. Aceste noi structuri au fost numite *quasicristale* și sunt versiuni spațiale ale unor pavaje plane particulare, neperiodice, adică fără simetrie de translație.

Existența pavajelor neperiodice ale planului e evidentă: e suficient să ne uităm la dale care acoperă planul, extinzându-se radial, ori spiraliform. Un exemplu de primul tip apare deja în *Tratatul asupra măsurării cu rigla și compasul* (1525) al lui Dürer, iar din el se poate deduce ușor un exemplu de al doilea tip.



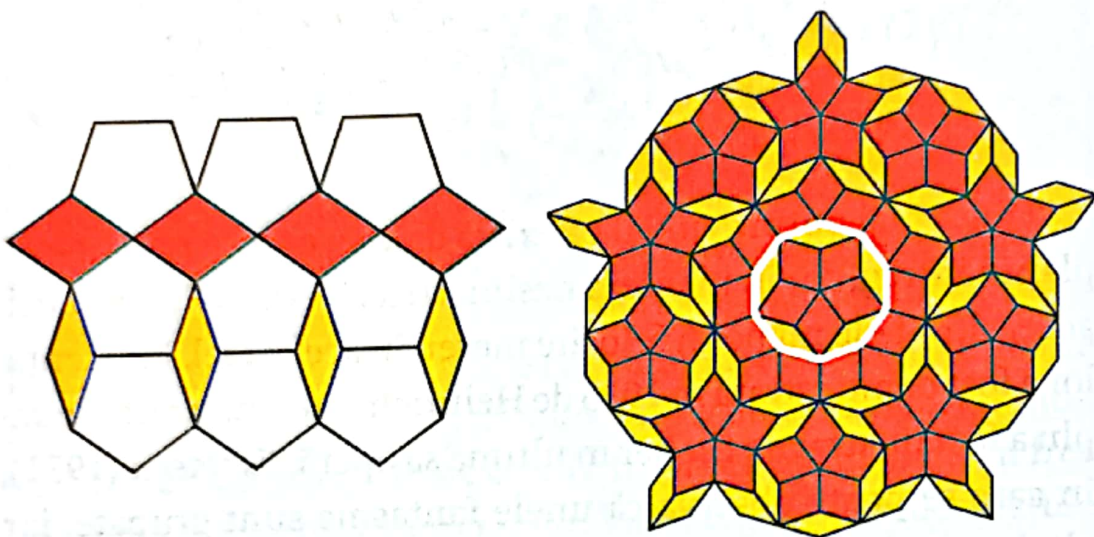
E însă mai puțin evident că există dale cu care se poate pava planul întreg, dar în manieră nesimetrică: forma dalelor e deci aceeași, dar ele nu pot fi folosite mereu în același fel. Existența lor a fost demonstrată în 1935 de Heinrich Heesch. Iar un exemplu a fost ilustrat de Escher în ultima sa operă, *Fantasme* (1971), în care se poate observa că unele fantasme sunt grupate, iar altele sunt izolate.

Și mai puțin evidentă e existența dalelor care permit pava-rea planului întreg, dar numai în manieră nesimetrică: adică fără să repete la infinit aceeași configurație. Existența lor a fost



demonstrată în 1966 de Robert Berger, dar într-un mod indirect și complicat.

În 1974, Roger Penrose a simplificat radical exemplul lui Berger, folosind două serii alternative cu câte două dale fiecare, ambele obținute din triunghiul de aur.¹ În prima serie, dalele

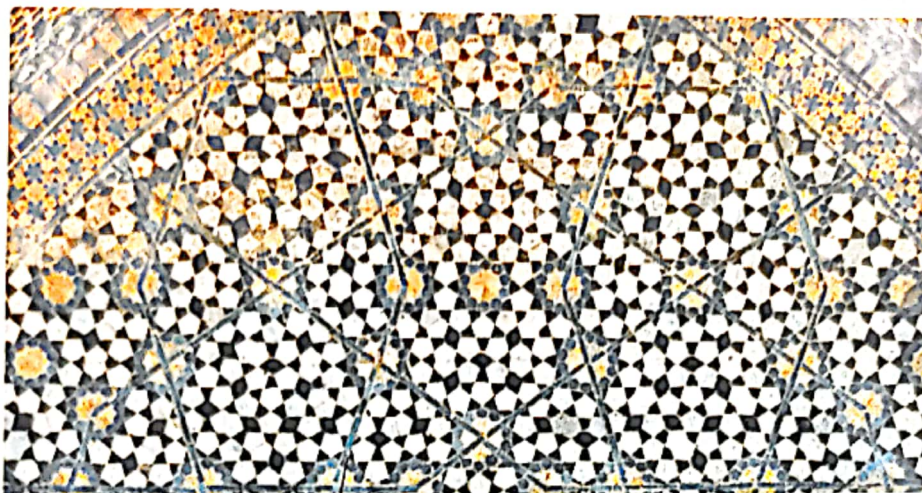


sunt două romburi care pot fi considerate și ca rezultând din cele două tentative evidente de pavaj pentagonal: primul e cel al lui Dürer, despre care am pomenit mai sus, al doilea e o versiune duală a sa.

Evident, fiecare din cele două romburi ale lui Penrose poate acoperi singur planul în manieră periodică, la fel ca orice alt patrulater. Trucul lui Penrose a fost să insereze printre ele caneluri care le permit numai anumite combinații ale lor, forțând astfel dalele să se extindă radial sub formă pentagonală, ori conform spiralei generate de triunghiul de aur. Acest lucru permite, pe de o parte, să pavăm întreg planul. Pe de altă parte, împiedică pavajul să fie periodic.

Chiar dacă aceste rezultate datează de la jumătatea secolului XX, s-a descoperit recent că pavajele neperiodice fuseseră deja găsite și folosite în secolul XV de către arabi. De data asta însă, nu în Spania, ci în Turcia, Iran și Uzbekistan.

1. Vezi secțiunea „Aur adevărat și fals“.



Cum Premiul Nobel, după cum bine se știe, nu se acordă postum, n-a fost posibil ca și arabii să-l primească pe cel din 2011 pentru fizică – Penrose însă l-ar fi putut reclama: dacă nu din alt motiv, măcar pentru că descoperirea sa o anticipa cu un deceniu pe a lui Shechtman. Mai mult, imaginile cvasicristalelor sunt adesea folosite ca să ilustreze cu exemple naturale pavajele sale. Iar pentru că matematicienii n-au fost niciodată agreeați la Stockholm, Penrose a fost nevoit să aștepte anul 2021 ca să primească un Nobel: pentru fizică, dar pentru lucrările lui despre găurile negre.¹

PIESELE COROANEI

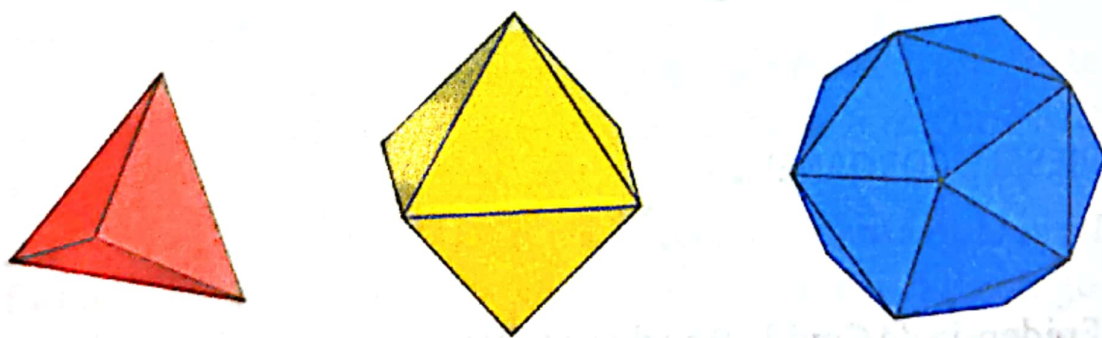
Virus

Epidemia de Covid-19 a adus o tristă popularitate imaginii aparent inofensive a deja cunoscutului flagel. Mai bine spus, a învelișului în care se ascunde singurul fir al ARN-ului virusului. Filamentul are aproximativ 30.000 de nucleotide individuale și, cu toate că lungimea sa este cea mai mare între virusurile cu ARN, este totuși de 100.000 de ori mai mică decât cea a ADN-ului uman, care depășește trei miliarde de perechi de baze.

1. Vezi secțiunea „Un Nobel de Oscar“.

După descoperirea structurii dublei elice a ADN-ului în 1953, Francis Crick și James Watson s-au întrebat cum ar putea un genom atât de redus să conțină informația necesară pentru strategia de reproducere a virusurilor și, în articolul „Structura virusurilor mici” din 1956, au propus ipoteza așa-numitei „economicității genetice”: pentru a economisi informații cu privire la construcția propriului său înveliș, forma așa-numitei capsidă ar trebui să fie cât mai simetrică posibil.

Presupunând că proteinele din care e alcătuită capsida ar fi organizate în structuri poligonale, Crick și Watson au analizat posibilele puncte de contact între vârfuri și au dedus că cea mai bună dispunere ar fi fost o combinație de piese triunghiulare echilaterale. Pe plan, aceste piese pot fi aranjate într-un model de pavaj triunghiular care, atunci când se înfășoară, produce o capsidă cilindrică. În spațiu, piesele pot fi dispuse în formă tetraedrală, octaedrală sau icoaedrală, cea mai eficientă dintre ele fiind cea din urmă: icoaedrul are, într-adevăr, 60 de simetrii, care reduc de șaizeci de ori informația necesară pentru construirea capsidei.

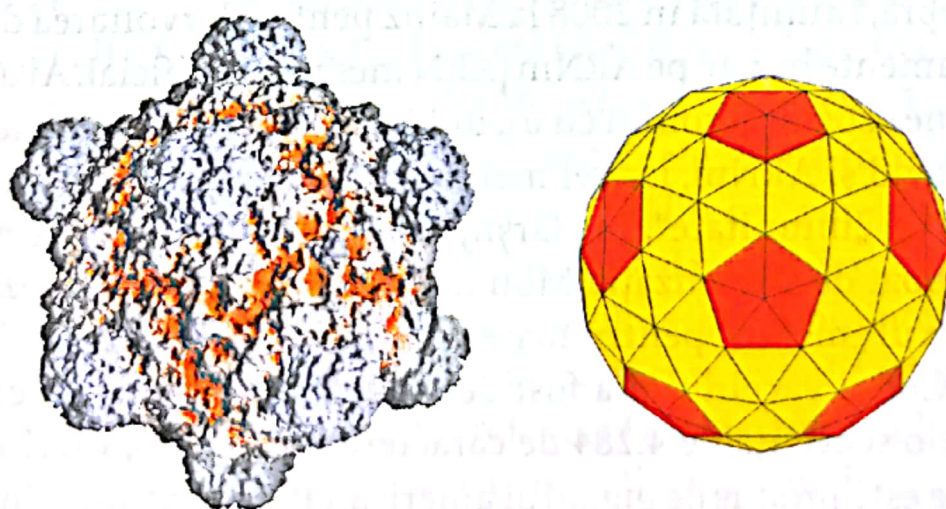


În 1958, la Expo din Bruxelles, Rosalind Franklin a prezentat modelul cilindric al mozaicului tutunului, culmea cercetărilor din ultima perioadă a vieții sale: a murit pe 16 aprilie în același an, cu o zi înainte de inaugurarea expoziției internaționale. Ștafeta a fost preluată de colaboratorii ei, Aaron Klug și Donald Caspar, care au continuat cercetările privind structura virusurilor icoaedrice.

În articolul „Principiile fizice ale construcției virusurilor regulate” (1962), ei au precizat ipoteza economicității genetice a lui Crick și Watson în principiul „cvasiechivalenței”, conform căruia virusurile icosaedrice sunt formate din structuri triunghiulare echilaterale dispuse în unghi în manieră „cvasiechivalentă”, adică pentagonală sau hexagonală. Îi inspiraseră cupolele geodezice ale arhitectului Buckminster Fuller¹, una dintre ele apărând chiar într-o ilustrație din articolul lor.

Mai precis, structura capsidei virusurilor icosaedrice, dintre care face parte și Covid-19, e formată din 180 de triunghiuri echilaterale, 60 dintre ele dispuse câte cinci (formând un pentagon solid) în jurul celor douăsprezece vârfuri ale icosaedrului, în timp ce celelalte 120 se dispun câte șase (în formă de hexagon plat) pe fiecare dintre cele douăzeci de fețe, întâlnindu-se în 92 de vârfuri. Astfel, genomul virusului trebuie să specifice numai regulile de formare a pieselor triunghiulare și dispunerea lor reciprocă, putând utiliza restul informației pentru a-și eficientiza strategia virală de reproducere și supraviețuire.

Natura hibridă a acestor virusuri, la jumătatea drumului dintre neînsuflețit și viu, se reflectă metaforic în natura hibridă a geometriei capsidelor lor icosaedrice, la jumătatea drumului dintre icosaedrul normal (12 vârfuri și 20 de fețe triunghiulare)



1. Vezi secțiunea „Mingi și cupole”.

și icosaedrul trunchiat (12 fețe pentagonale și 20 hexagonale), în formă de minge de fotbal. Ceea ce lasă deschisă posibilitatea unor virusuri mai complicate, cu capsida în formă nu de poliedru regulat, ci arhimedian, ca icosaedrul trunchiat.

Efectiv, virusuri ca papilomul și poliomul constituie excepții la teoria lui Klug și Caspar, dar se încadrează într-o teorie geometrică mai generală, publicată de Reidun Twarock și Antoni Luque în „Puzzle-uri structurale în virusologie rezolvate cu un principiu de design icosaedric global” (2019), teorie care utilizează pentru forma capsomerilor datele lui Penrose pentru pavaje neperiodice¹ și promite să furnizeze indicații utile pentru dezvoltarea unor antivirale care merg să atace virusul acționând direct asupra strategiei lui de formare.

VACCINURI PROGRAMATE

Antivirus

BNT162b2, cunoscut și sub numele de Comirnaty sau Tozinameran, este primul vaccin al unei noi ere medicale, planificat în laborator și construit artificial în 2020. Literele „BNT” din primul nume sunt acronimul pentru Biopharmaceutical New Technologies, sau BioNTech: o companie germană de-acum celebră, înființată în 2008 la Mainz pentru dezvoltarea de medicamente bazate pe ARNm [ARN mesager] artificial. Al doilea nume este un acronim cu un dublu sens: unul literal referitor la covid și ARNm, iar cel metaforic asociindu-se cu „comunitate” și „imunitate”. În sfârșit, cel de-al treilea nume este cel aprobat de Organizația Mondială a Sănătății, care a rezervat sufixul „meran” pentru toate vaccinurile cu ARNm.

Codul vaccinului a fost dezvoltat de BioNTech și constă într-o secvență de 4.284 de caractere. În schimb, vaccinul în sine este produs de gigantul american Pfizer, înființat în 1849

1. Vezi secțiunea „Un Nobel aproape cristalin”.

la New York, printr-un proces care utilizează imprimante de ADN. Aceste mașini, care reprezintă o versiune biologică a imprimantelor 3D, folosesc codul pentru a sintetiza o matrice de ADN, din care este apoi obținut în vitro (prin polimerază) ARN-ul messenger al vaccinului. Acesta, ambalat corespunzător pentru transport și pregătit pentru inoculare, ajunge apoi în flacoane de 30 de micrograme, reprezentând o doză, și trebuie păstrat la temperaturi extrem de scăzute din cauza fragilității intrinsece a ARN-ului.

Așa cum se întâmplă în natură, ARN-ul messenger al vaccinului începe cu o *căciulă* constând în cele două caractere GA, care semnalează celulei că e vorba de material genetic provenit din nucleul său: semnalarea e o minciună, pentru că este de fapt ARNm care vine din exterior, dar poate fi iertată, deoarece e proferată în scopuri bune. În treacăt fie spus, programele executabile MS-DOS începeau analog cu cele două caractere MZ, care erau inițialele numelui primului programator Mark Zbikowski: cu un pic de megalomanie, dezvoltatorii vaccinului ar putea interpreta așadar literele GA ca inițialele lui *God Almighty* (Dumnezeu Atotputernic).

Urmează o *primă regiune netradusă* de 52 de caractere, care specifică în ce interstițiu din celula 3D care imprimă (ribozomul) trebuie inserat codul de reproducere. Această parte e direct copiată din cea corespunzătoare din gena umană HBA1 a hemoglobinei alfa 1. Vine apoi o *secvență semnal extinsă*, de 48 de caractere împărțite trei câte trei în 16 codoni care specifică zona celulei din care vor trebui să iasă proteinele create (reticulul endoplasmatic). Această parte e copiată din cea corespunzătoare din virusul SARS-CoV-2 al Covid-19, dar cu diferite adaptări, folosite și ulterior: în particular, se folosesc codoni sinonimi cu aceia folosiți de virus, în sensul că ei corespund aceluiași aminoacizi, dar privilegiază literele C și G în defavoarea lui U, ceea ce crește eficiența producerii respectivelor proteine.

Adaptarea crucială constă însă în înlocuirea literei U cu un pseudo-U (Ψ), descoperit de Katalin Karikó în 1995, care are o

proprietate miraculoasă. Pe de o parte, e suficient de diferit de U pentru a permite vaccinului să ocolească sistemul de recunoaștere și distrugere al ARN-ului din exteriorul celulei (proteina chinază activată de ARN). Pe de altă parte, e suficient de asemănător cu U pentru a permite utilizarea sa de către ribozom în producerea proteinelor.

Urmează *secvența mutantă* fundamentală de 3.777 de caractere sau 1.259 de codoni, care specifică instrucțiunile pentru construirea țepilor (*spikes*) din învelișului virusului: aceștia vor stimula sistemul imunitar să producă anticorpi pentru eliminarea lor și, prin urmare, pentru eliminarea întregului virus. Această parte este, de asemenea, copiată din cea corespunzătoare a virusului, dar cu două mutații în pozițiile 986 și 987, pentru a înlocui cei doi aminoacizi utilizați de virus (lizină și valină) cu cel utilizat de vaccin (prolina). Motivul este că, fără învelișul virusului, țepii ar colapsa și ar produce anticorpi ineficienți împotriva virusului, pe când cele două mutații fac ca țepii să fie rigizi chiar și fără înveliș.

Vaccinul se încheie cu o *a doua regiune netradusă* de 295 de caractere, cu funcții de stabilizare și optimizare a ARN-ului, și o *coadă repetată* de 110 caractere terminale, aproape toate fiind A, care servesc la semnalarea sfârșitului codului și la împiedicarea degradării acestuia prin utilizări repetate.

Iar în aceste 4.284 de caractere, cuprinse în doar două pagini, miliarde de oameni și-au pus speranța de supraviețuire în timpul pandemiei de Covid-19.

BIOLOGIE

FORMULA EVOLUȚIONISMULUI

Legea lui Hardy și Weinberg

Printre numeroasele critici aduse teoriei evoluționiste în secolul și jumătate care a urmat publicării capodoperei lui Charles Darwin *Originea speciilor* (1859), una dintre cele mai neinformate și neîntemeiate este că teoria sa nu e științifică, pentru că nu este exprimată în limbaj matematic. De fapt, ecuația evoluționismului există de mai bine de un secol, și a fost descoperită independent în 1908 de Godfrey Hardy și Wilhelm Weinberg, de unde și numele de *legea Hardy-Weinberg*.

Legile eredității fuseseră descoperite în 1866 de Gregor Mendel și redescoperite în 1900 de Hugo de Vries, Carl Correns și Erich von Tschermak. În esență, acestea stabilesc că, dacă doi indivizi heterozigoți, purtători a două variante A și a ale aceluiași caracter (numite tehnic *alele*), prima dominantă și a doua recesivă, se încrucișează, atunci progenitura lor va fi un sfert homozigotă dominant (AA), un sfert homozigotă recesiv (aa) și jumătate heterozigotă (Aa sau Aa), pur și simplu conform legilor combinatoricii matematice.

Într-adevăr, meioza separă cele două alele ale fiecărui părinte, astfel încât jumătate din gameți (spermatozoizii masculini și ovulele feminine) vor avea una din ele, iar cealaltă jumătate, pe cealaltă. Și deoarece fecundarea combină în mod aleatoriu un gamet masculin și unul feminin, fiecare dintre cele patru combinații are un sfert din șansele posibile.

În 1902, Udny Yule a ridicat o posibilă obiecție față de mendelism: dacă progenitura exprimă pe trei sferturi varianta dominantă a caracterului (care necesită doar o alelă A), iar pe un sfert varianta recesivă (care necesită ambele alele a), de ce alelele și caracterele dominante nu cresc în populație, până la dispariția celor recesive?

Răspunsul a fost dat de Hardy printr-o scrisoare către revista *Science*, intitulată „Proporții mendeliene într-o populație mixtă” (1908), care începea modest astfel:

Sunt reticent să mă implic într-o discuție despre un subiect în care nu sunt expert, și m-aș fi așteptat ca faptul simplu asupra căruia vreau să atrag atenția să fie cunoscut biologilor. Dar unele observații ale lui Udny Yule sugerează că totuși ar merita s-o fac.

Acel „fapt simplu” era că, dacă cele două alele A și a sunt prezente în gameții populației în proporțiile p și q , atunci același raționament arată că, dacă indivizii se împerechează în mod aleatoriu, progenitura lor va fi homozigotă dominant în proporție de p^2 , homozigotă recesiv în proporție de q^2 , și heterozigotă în proporție de $2pq$. Dar atunci, în gameții progeniturii, alela A va fi prezentă în proporție de $p^2 + pq = p(p + q)$, iar alela a în proporție de $q^2 + pq = q(p + q)$. Și deoarece $p + q = 1$, cele două proporții sunt aceleași cu cele inițiale, adică p și q : cu alte cuvinte, proporțiile atât ale celor două alele, cât și ale genotipurilor lor (adică ale indivizilor care prezintă respectiva variantă a caracterului) rămân constante din generație în generație, independent de valorile inițiale.

Deoarece evoluția are loc atunci când lucrurile se schimbă, ea este posibilă numai atunci când *nu* sunt prezente cel puțin unele dintre condițiile care duc la echilibrul lui Hardy și Weinberg. Pe de o parte, trei presupuneri ale raționamentului lor sunt de natură statistică: perechile trebuie să fie echiprobabile și aleatorii, iar populația trebuie să fie suficient de mare pentru

a se aplica legea numerelor mari. Pe de altă parte, două presupuneri suplimentare sunt de natură fizică: sistemul trebuie să fie stabil și închis. Așadar:

- Împerecherile neechiprobabile sunt caracteristice selecției naturale, care favorizează fertilitatea sau supraviețuirea unor indivizi față de alții.
- Împerecherile nealeatorii sunt în schimb caracteristice *selecției artificiale* impuse de crescători sau cultivatori, precum și *selecției sexuale* practicate de partenerii selectivi.
- Dacă populația e mică, poate apărea o derivă genetică. De exemplu, în cazul unui număr redus de supraviețuitori ai unei catastrofe, cunoscut sub numele de *gât de sticlă*. Sau în cazul unui număr redus de emigranți separați de un grup, cunoscut sub numele de *efect fondator*.
- Instabilitatea sistemului poate fi provocată de *mutații* endogene (de copiere) sau exogene (de deteriorare) ale unor alele individuale.
- Deschiderile sistemului, în cele din urmă, pot fi generate de *fluxuri genetice* de intrare (imigrație) sau ieșire (emigrație) din populație.

Cu tot respectul pentru antievoluționiștii exagerați și neinformați, matematica permite să se redescopere condițiile evolutive identificate de biologi în mod empiric, așa cum se potrivește oricărei teorii științifice solide.

BAZA SELECȚIEI NATURALE

Teorema lui Fischer

Galilei a scris *Dialog asupra celor două sisteme principale ale lumii* (1632) în formă discursivă, fără formule.¹ Ar fi însă naiv și stupid să deducem de aici că astronomia nu e matematizată.

1. Vezi secțiunea „Statul de vorbă“.

Sau, și mai rău, că nu e matematizabilă. Cine ar spune așa ceva ar demonstra doar că e ignorant și n-are habar de dezvoltările succesive, începând cu *Principia* (1687) lui Newton.

La fel se întâmplă cu *Originea speciilor* (1859) a lui Darwin, carte care, din multe puncte de vedere, reprezintă pentru evoluționism ceea ce reprezintă cartea lui Galilei pentru astronomie. Într-adevăr, teoria lui Darwin și-a găsit propriul Newton în persoana lui John Haldane și propria *Principia* în cele zece părți ale lucrării scrise timp de zece ani, *Teoria matematică a selecției naturale și artificiale* (1924–1934).

În deschiderea primei lucrări, Haldane stabilește obiectivele a ceea ce avea să devină ulterior *genetica evolutivă a populațiilor*:

O teorie satisfăcătoare a selecției naturale trebuie să fie cantitativă. Pentru a stabili că selecția naturală e capabilă să explice faptele cunoscute ale evoluției, trebuie să arătăm nu doar că poate provoca o modificare a speciei, ci că o poate face într-un ritm care să țină seama de transformările trecute și prezente. Pentru fiecare caz trebuie specificat:

1. Cum se moștenește caracterul respectiv.
2. Cum e fertilizat grupul de organisme considerat.
3. Intensitatea selecției.
4. Incidența ei, de exemplu asupra ambelor sexe sau doar a unuia.
5. Rata de creștere sau descreștere a proporției de organisme care posedă respectivul caracter.

Acest program de matematizare are nevoie, între altele, de definiția unei unități de măsură: Haldane a dat-o în articolul „Sugestii pentru măsura cantitativă a ritmului evolutiv” (1949) și a numit-o, evident, *darwin*, după cum și unitatea de măsură a forței se cheamă, la fel de evident, *newton*. Mai precis, un caracter măsurabil se schimbă în ritm de un darwin dacă într-un milion de ani crește sau descrește de e ori, unde e este baza logaritmilor naturali, număr aproximativ egal cu 2,7118. Mai general, un

caracter măsurabil se modifică în ritmul $(\ln b - \ln a)/t$ darwini dacă crește de la a la b în t milioane de ani.

Darwinul măsoară modificarea locală a unui caracter, nu pe cea globală a unui organism ori a unei populații. Bazele teoriei modificărilor globale au fost puse de Ronald Fischer în *Teoria genetică a selecției naturale* (1930), considerată cel mai important text al teoriei evoluției după cele două capodopere ale lui Darwin despre originea speciilor și a omului.

Câteva rezultate clasice demonstrate de Fisher arată că probabilitatea adaptabilității unui organism în urma unei mutații e invers proporțională cu magnitudinea mutației, iar probabilitatea supraviețuirii unei populații e proporțională cu varianța sa genetică. În termeni mai puțin tehnici, o schimbare mare este periculoasă pentru un individ, dar o diversitate mare este avantajoasă pentru o populație.

Al doilea capitol al cărții e intitulat chiar „Teorema fundamentală a selecției naturale” și demonstrează că „rata de creștere a adaptabilității unui organism sau a unei populații este egală cu varianța lor genetică adaptativă”. Multă vreme, atât enunțul, cât și demonstrația teoremei lui Fisher au fost înțelese greșit: în special, s-a crezut că în teorie, pe măsură ce trece timpul, atât indivizii, cât și populațiile tind să-și mărească adaptabilitatea în mod indefinit, în contrast cu observațiile făcute.

Misterul a fost rezolvat de George Price, care în articolul „Teorema fundamentală a lui Fisher clarificată” (1972) a arătat că aceasta trebuie interpretată doar în ceea ce privește schimbarea produsă de acțiunea selecției naturale, nu și a mediului. Schimbarea mediului are adesea un semn opus și e responsabilă pentru reacția care atenuează creșterea indefinită a adaptabilității, la fel cum frecarea atenuează mișcarea inerțială indefinită.

Datorită contribuțiilor lui Haldane, Fisher și Price, în secolul XX teoria evoluției prin selecție naturală a devenit pe deplin parte a familiei științelor matematizate, fiind pregătită să primească cu brațele deschise în noul mileniu multe alte discipline, începând cu psihologia.

Pe lângă faptul că a fost, alături de Henri Poincaré, unul dintre cei mai de seamă matematicieni de la cumpăna secolelor XIX și XX, David Hilbert a fost și unul dintre cei mai importanți filozofi ai matematicii la începutul secolului XX¹, împreună cu Bertrand Russell și Luitzen Brouwer. În timp ce aceștia din urmă propuneau o reducere a matematicii, primul la logică strictă și al doilea la aspecte pur constructive, Hilbert a extins în două direcții abordarea axiomatică deja adoptată de Euclid. Pe de o parte, a studiat proprietățile metamatematice ale axiomei, precum independența, coerența și completitudinea. Pe de altă parte, a analizat proprietățile structurale ale demonstrațiilor, cum ar fi lungimea ordinală și complexitatea logică.

Printre avantajele abordării axiomatice subliniate de Hilbert se număra posibilitatea de a oferi multiple interpretări și, astfel, multiple aplicații ale diferitelor sisteme. Exemplară pentru această concepție a fost observația sa că, dacă unele concepte satisfac toate axiomele privind punctele, liniile și planele, atunci ele trebuie să satisfacă și toate teoremele geometriei: chiar și concepte aparent nematematice, precum *Mese*, *scaune*, *halbe de bere*, preluate de Gabriele Lolli în titlul unei cărți² care analizează detaliat lucrarea fundamentală a lui Hilbert.³

Faptul că el vorbea și acționa serios este dovedit de articolul său „Cunoașterea naturii și logica” (1930), în care se afirmă:

Drosophila este o muscă mică de mare interes. În mod normal, această musculiță este gri, are ochii roșii, nu are pete și are aripi rotunde și lungi. Dar există și musculițe în care aceste cinci caracteristici sunt diferite, iar abaterile de la

1. Vezi secțiunea „Îndoieli și certitudini”.

2. Vezi secțiunea „Fundamentele literaturii”.

3. *Tavoli, sedie, bocalli di birra*, Raffaello Cortina, 2016.



împerecherea normală a diferitelor caracteristici se înregistrează la urmașii săi într-un procent bine definit și constant.

Pentru numerele astfel găsite experimental se aplică axiomele euclidiene ale congruenței și axiomele relației „a sta între”. Prin urmare, legile eredității sunt deduse ca aplicații ale axiomei congruenței liniare, adică ale teoremelor geometrice elementare privind transportul segmentelor cu o atât de mare simplitate și precizie și, în același timp, într-un mod atât de minunat cum nici cea mai îndrăzneță fantezie nu ar fi putut imagina.

Hilbert nu oferă detalii cu privire la acest aspect, dar se poate reconstitui ceea ce intenționa el citind saga cercetărilor asupra drosofilei relatată de Martin Brookes în *Musca*¹. Povestea începe în 1910, când Thomas Morgan a făcut prima descoperire importantă despre drosofilă: faptul că o muscă avea ochii albi, în loc de roșii. Încrucișarea „muscă albă” cu o femelă cu ochi roșii a produs o primă generație de fii și fiice cu toți ochii roșii, în timp ce în a doua generație ochii albi au reapărut, în proporție de aproximativ 1 din 4: toate nepoatele aveau ochii roșii, în timp ce jumătate din nepoți aveau ochii roșii, și jumătate albi.

Explicația lui Morgan a fost că gena pentru culoarea ochilor trebuia să fie pe cromozomul sexual X, iar cea pentru culoarea

1. Martin E. Brookes, *Fly. The unsung Hero of the 20th Century*, Harper Collins, 2002.

roșie trebuia să fie dominantă. Astfel, în prima generație, atât masculii (XY), cât și femelele (XX) aveau o copie a genei dominante de la mamă, și, prin urmare, ochii roșii. În a doua generație, femelele continuau să aibă ochii roșii, deoarece primeau de la tată gena roșie, dar masculii aveau culoarea determinată de genele mamei, care avea una roșie și una albă: așadar, jumătate din masculi aveau ochii roșii, și jumătate albi.

Morgan a observat apoi că mutația unei alte gene de pe cromozomul X provoca schimbări în aripi, dar independent de mutațiile genei pentru ochi. Acest lucru însemna că un proces de recombinare a cromozomilor cuplați efectua o *cut and paste* a genelor, iar frecvența mai mare sau mai mică cu care mutațiile apar cuplate în indivizi măsoară cât de aproape sau de departe sunt genele respective pe cromozom.

Genele de pe cromozomi erau așadar ordonate liniar, iar problema era să se identifice harta dispunerii celor cinci gene descoperite până atunci pe cromozomul X, tocmai cea la care făcea referire Hilbert, în funcție de frecvența cu care apar cuplate mutațiile. Acest lucru a fost realizat în 1911, într-o singură noapte, de studentul în vârstă de nouăsprezece ani Alfred Sturtevant, exact ca un simplu exercițiu geometric de aplicare (la genele de pe cromozomi) a proprietăților relației „a fi între” (a punctelor pe segmente). Contribuind astfel la obținerea Premiului Nobel pentru medicină de către Morgan în 1933.

JOCUL VIEȚII

Codul genetic natural

Știința din care s-a inspirat cel mai mult matematica, de la Arhimede la Witten, a fost până acum fizica. De ceva vreme însă, biologia și informatica au început să ofere probleme stimulante și inovatoare: cea dintâi, de exemplu, a propus două care se inspiră din mecanismul reproducerii.

Prima îi este atribuită lui Von Neumann care, într-o conferință epocală despre „Teoria generală și logică a automatelor”, (1948) a pus problema construirii unui automat capabil să se autoreproducă. Pentru început, a postulat existența unui constructor universal C , capabil să reproducă orice mașină M pornind de la un proiect m . Practic, constructorul C are capacitatea de a căuta în mediul ambiant piesele necesare construcției mașinii M și de a le asambla conform proiectului m .

Constructorul C este „aproape” capabil să se autoreproducă, deoarece poate construi o copie a sa urmărind propriul său proiect c . Cu toate acestea, rezultatul nu e complet, deoarece începe cu două intrări (constructorul C echipat cu propriul său proiect c) și reproduce doar una din ele (copia lui C). Pentru a rezolva această problemă, Von Neumann a postulat și existența unui copiator universal F , capabil să facă o copie a oricărui proiect, și a coordonat cele două mașini C și F într-un mecanism capabil să facă o copie a proiectului m și s-o introducă în copia mașinii M , construită tocmai conform proiectul m .

În acest punct, sistemul format din mașina A și propriul său proiect a este capabil să se autoreproducă: el face de fapt o copie a proiectului a și o introduce în copia mașinii A construită urmărind proiectul însuși. Dacă e necesar, mașina poate produce și mașini mai complexe decât ea însăși, întotdeauna în conformitate cu propriul lor proiect.

Interesul acestui simplu raționament matematic este că el reprezintă un model simplificat al reproducerii genetice, prefigurat cinci ani mai târziu de Watson și Crick în articolul lor istoric despre „Structura moleculară a acizilor nucleici” (1953). Un proiect m este, într-adevăr, analogul uneia sau mai multor gene care codifică informația necesară pentru reproducerea uneia sau mai multor proteine. Fotocopiatorul F funcționează ca o enzimă care reproduce materialul genetic. Constructorul C îndeplinește aceeași funcție ca ribozomii care produc proteinele. Mașina A

este versiunea matematică abstractă a unei celule care se autoreproduce.

Evident, dincolo de a fi drastic simplificat, modelul acesta rămâne încă pur teoretic, deoarece nimic nu garantează existența unei clase de mașini pentru care să existe un constructor universal. În acest sens, în *Teoria automatelor autoreproducătoare* (1966), Von Neumann a inventat niște automate celulare speciale, simplificate considerabil mai târziu de Conway în așa-numitul „Joc al vieții” (*Life*)¹, demonstrând astfel cum, cu câteva simple considerații *a priori*, matematica era capabilă să anticipeze unele dintre cele mai interesante dezvoltări ale biologiei moderne.

Apropo de asta, Crick însuși a încercat să explice unele aspecte ale codului genetic în manieră pur matematică, după ce a descoperit dubla elice. Își propunea să rezolve următoarea problemă: dacă alfabetul ADN-ului e constituit din patru litere (A, C, G și T), iar cuvintele din triplete de litere (codoni), nu sunt $4 \times 4 \times 4$ aminoacizi, ci doar 20.

Conform ipotezei lui Crick, codul genetic ar fi „fără virgulă”, adică ar permite reconstruirea în manieră univocă a împărțirii în codoni a unei secvențe de ADN, chiar și pornind de la un singur fragment. Ipoteza elimina de la bun început cei patru codoni compuși din una și aceeași literă, pentru că altminteri fragmentul XXXXXX s-ar putea divide în moduri diferite. Din cei 60 de codoni rămași, dacă unul e semnificativ, cei doi obținuți prin permutările sale circulare n-ar trebui să apară: de exemplu, dacă XYZ e semnificativ, n-ar trebui să apară nici YZX, nici ZXY, altminteri fragmentul XYZXYZ s-ar putea divide în moduri diferite. Așadar, doar o treime din cei 60 de codoni care nu sunt compuși dintr-o singură literă pot fi semnificativi: exact 20.

Matematica era corectă, dar nu și explicația. Știm astăzi că și codonii compuși din trei litere repetate pot codifica un

1. Vezi secțiunea „Marele joc”.

aminoacid, iar codoni diferiți pot codifica același aminoacid. Prin urmare, matematica de una singură nu-i de-ajuns în aplicații, pentru că nu tot ce poate exista în teorie există efectiv în practică. Dar acest lucru, departe de a fi un defect, e o calitate care face jocul și mai interesant.

CRIPTO BIOLOGIE

Un cod genetic artificial

Pe 20 mai 2010, în cadrul unei conferințe de presă care a atras atenția întregii lumi, Craig Venter a anunțat sinteza unei celule, obținută de Synthetic Genomics, o companie pe care a fondat-o. A explicat că în genomul sintetic, preluat de la *Mycoplasma mycoides*, au fost inserate patru așa-numite *watermarks*, „filigrane” asemănătoare celor folosite în mod obișnuit în programele de calculator pentru a adăuga comentarii sau a semna produsul.

Filigranele din genomul sintetic conțineau, pe lângă numele prozaice ale celor 46 de cercetători care au contribuit la această realizare, și trei citate rafinate. Unul dintre acestea provine din *Portret al artistului la tinerețe* (1916), de James Joyce: „A trăi, a ră-tăci, a cădea, a triumfa, a recrea viața din viață.” Un altul este din cartea lui Kai Bird și Martin Sherwin despre Oppenheimer:¹ „Vezi lucrurile nu așa cum sunt, ci așa cum ar trebui să fie.” Iar al treilea, din ultima frază pe care Richard Feynman, laureat al Premiului Nobel pentru fizică în 1965, ar fi scris-o pe tablă înaintea de a muri: „Ceea ce nu pot face nu pot înțelege.”

Desigur, pentru a putea scrie fraze într-un genom e necesară o codificare. În cadrul conferinței de presă, Venter a afirmat:

Matematicienii au ascuns și au scris mesaje în codul genetic pentru o perioadă îndelungată. Cu toate acestea, este evident

1. *American Prometheus. The Triumph and Tragedy of Robert J. Oppenheimer*, Alfred A. Knopf, 2005.

că matematicienii nu sunt biologi, pentru că, dacă se transcriu mesaje lungi cu codurile pe care le-au dezvoltat, există o probabilitate mare ca acestea să ducă la sinteza unor proteine noi, cu funcții necunoscute. Astfel, codul pe care echipa noastră l-a dezvoltat folosește frecvent codoni de oprire.

Altfel spus, transcrierea filigranelor în proteine este împiedicată de frecvența inserare a celor trei codoni: TAA, TGA și TAG, care în codul genetic au funcția de a întrerupe transcrierea. Analog, în programele de calculator, filigranele sunt introduse între simboluri speciale, care semnalează compilatorului să trateze acel text ca material străin programului, fără a-l compila.

Încă din 2008, cu ocazia sintezei primului cromozom, echipa condusă de Venter a codificat numele cercetătorilor în genom. Alfabetul folosit atunci a fost cel al codonilor, adică al tripletelor de baze A, C, G și T. Codul a asignat fiecăruia dintre cei 64 de codoni prima literă a numelui aminoacidului corespunzător: de exemplu, „a” codonului GCT care corespunde alaninei.

Acest cod avea însă multe probleme, preluate de la caracteristicile codului genetic. În primul rând, există doar 20 de aminoacizi, iar numele lor încep doar cu o duzină de litere, dintre care doar două vocale; astfel, codul este insuficient. În plus, mai mulți codoni corespund aceluiași aminoacid și, prin urmare, aceleași litere, deci codul e redundant.

În 2010, echipa a păstrat același alfabet, dar a adoptat un cod mai asemănător cu cel ASCII al computerelor. A uitat, în esență, semnificația biologică a codonilor, atribuind fiecăruia o literă, o cifră sau un semn de punctuație într-un mod aproape arbitrar. „Aproape”, pentru că, din motivele explicate de Venter, celor trei codoni de oprire le-au fost atribuite cele trei litere cele mai frecvente în alfabetul englez: „e” (TAA), „t” (TGA) și „a” (TAG).

Cu toate acestea, Venter nu a dezvăluit codul; dimpotrivă, l-a păstrat ascuns. Dar echipa sa știa că criptografia modernă a dezvoltat diverse metode pentru a decipta mesajele și a descoperi codurile lor, printre acestea fiind și statistica literelor. Așa

că în primul filigran exista următorul mesaj: „Demonstrează că ai decodificat acest filigran trimițându-ne un e-mail la adresa următoare: jcventer@jcv.org”, unde „jcv” este acronimul pentru Institutul John Craig Venter.

Lăsând deoparte analiza statistică, decriptarea textului codificat e înlesnită de diferiți factori. În primul rând, cunoaștem textele celor trei citate pe care Venter le-a anunțat în conferința sa de presă, precum și numele autorilor lor. Apoi, se poate presupune că printre cele 46 de nume care apar în filigrane se află și cei 24 de cercetători care au semnat articolul „Crearea unei celule bacteriene controlate de un genom sintetizat în mod chimic” (2010), publicat în revista *Science*. Restul e doar o chestiune de răbdare. Distracție plăcută! Ba chiar,

ATT CTG TTG TAA CTA TGA CTG TGA TAA TTG CTG!

EVALUAREA METABOLISMULUI

Legile lui Rubner, Bergmann și Allen

Printre multe alte calități pentru care era cunoscut Enrico Fermi, Premiul Nobel pentru fizică, se număra și aceea de a propune probleme aparent imposibile, pe care reușea să le rezolve cu calcule aproximativ corecte bazate pe ipoteze rezonabile, chiar și în absența unor date experimentale semnificative.

Un exemplu aproape paradoxal de „problemă Fermi” a fost estimarea dată de el pentru numărul de acorduri de pian din Chicago. Fermi a presupus că existau aproximativ 9 milioane de locuitori în oraș, o medie de 2 locatari pe apartament și un pian la fiecare 20 de locuințe. A imaginat că fiecare instrument era acordat o dată pe an, cu o muncă de câteva ore, și că fiecare acordor lucra 8 ore pe zi, 5 zile pe săptămână și 50 de săptămâni pe an. A ajuns la o estimare de 225 de acorduri, care în 2006 era numărul exact de acorduri din Chicago – și nici în ceilalți ani nu se abătea prea mult de la realitate.

Motivul pentru care acest tip de estimări poate funcționa este că fiecare ipoteză numerică poate fi greșită prin exces sau lipsă, dar diferitele erori se pot compensa reciproc și pot produce totuși un rezultat final bun. În biologie, unde obținerea datelor obiective poate fi mai dificilă decât în alte domenii, acest tip de raționament *a priori* a dus adesea la legi confirmate *a posteriori*. Cu toate acestea, deoarece sunt legi empirice, există adesea excepții corespunzătoare.

În particular, deoarece cantitatea de căldură produsă de un corp e proporțională cu volumul său, *legea lui Carl Bergmann* (1847) stabilește că în zonele reci indivizii aceleiași specii endoterme au dimensiuni mai mari decât cei din zonele calde: de exemplu, ursul polar este mai mare decât cel californian. Și deoarece dispersia căldurii este proporțională cu suprafața corpului, *legea lui Joel Allen* (1877) stabilește că în zonele calde indivizii au urechi, membre și cozi mai lungi și mai subțiri: de exemplu, iepurele și vulpea deșertului au urechi mai ascuțite decât suratele polare.

Dacă legile anterioare sunt pur calitative, *legea lui Max Rubner* (1883) este cantitativă și stabilește că metabolismul unui mamifer e proporțional cu pătratul rădăcinii cubice a greutateii sale, cu o dependență exponențială de exponent $2/3$. Raționamentul „à la Fermi” care conduce la această lege e următorul: consumul de energie în repaus este proporțional cu viteza de dispersie a căldurii, altfel animalul s-ar încălzi sau s-ar răci; dar suprafața unui corp este proporțională cu pătratul rădăcinii cubice a volumului, iar greutatea este proporțională cu volumul.

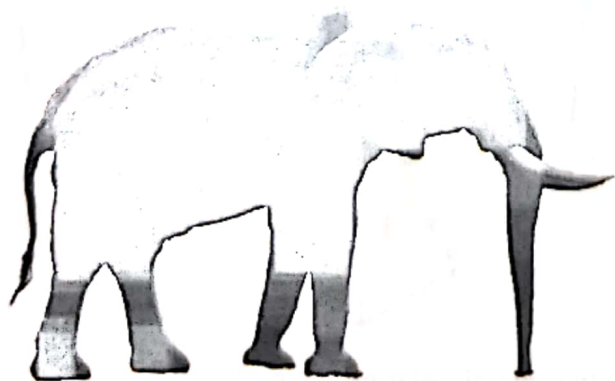


Conform legii lui Rubner, metabolismul crește mai lent decât greutatea: de exemplu, o dublare a greutății corespunde doar unei creșteri de 60% a metabolismului, deoarece pătratul rădăcinii cubice a lui 2 este aproximativ 1,6. Pentru a-și menține metabolismul, un animal mic trebuie să mănânce mai mult decât unul mare. Și același habitat permite hrănirea unui volum total de animale mari mai mare decât un volum total de animale mici, cu aceleași obiceiuri alimentare.

Un raționament similar cu cel pentru legea lui Rubner duce la același raport între forța musculară a picioarelor și greutatea animalului. De fapt, forța e proporțională cu aria secțiunii transversale, în timp ce greutatea e proporțională cu volumul: așadar, forța e proporțională cu pătratul rădăcinii cubice a greutății. Și pentru că forța crește mai lent decât greutatea, pentru a o menține constantă trebuie să creștem mai rapid dimensiunile picioarelor: de exemplu, raportat la greutate, elefantul are picioare mai mari decât șoricelul.

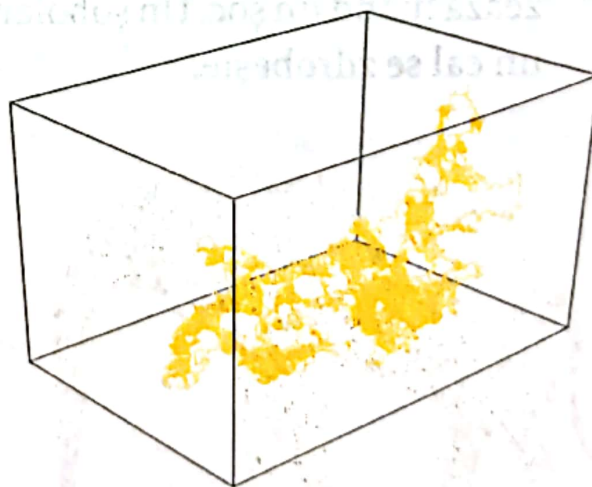
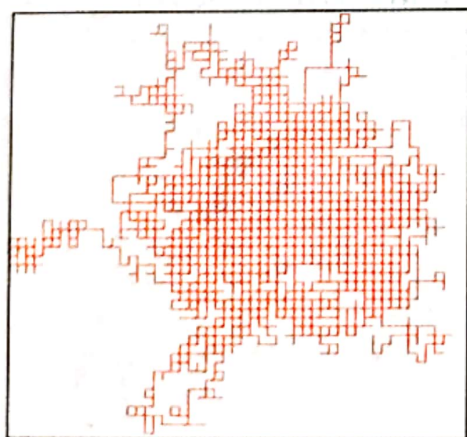
Mai general, încă din 1638, în *Discurs despre două științe noi*, Galilei observase că, deoarece unele funcții ale unui animal depind de suprafața sa, iar altele de volumul său, o creștere semnificativă a dimensiunilor sale necesită o schimbare în structura lui. John Haldane a adăugat, în articolul „A avea mărimea corectă” (1926) că există dimensiuni optime pentru fiecare structură și că o creștere a dimensiunilor corespunde unei scăderi a rezistenței:

Un șoricel care cade într-un puț de o mie de metri aterizează luând un șoc. Un șobolan moare. Un om se frânge. Iar un cal se zdrobește.



Legenda spune că într-o zi din 1921 George Polya a ieșit la plimbare într-un parc aproape de Universitatea din Zürich. În timp ce mergea, a văzut pe o bancă un cuplu, studenți de-ai săi, care se sărutau. I-a salutat, a continuat să meargă, și după un timp i-a revăzut pe aceeași bancă. I-a salutat din nou, a continuat să meargă, și după un timp i-a văzut din nou. Bineînțeles, s-a simțit jenat, deoarece s-a temut că ar putea crede că-i spiona, în timp ce el doar se plimba la întâmplare pe aleile parcului. Așa că s-a așezat și el pe o bancă, și a calculat probabilitatea de a reveni la punctul de plecare mișcându-se pe o foaie în pătrățele, dacă la fiecare pas se parcurge o latură a unui pătrat într-o direcție aleasă la întâmplare. A descoperit că aceasta este 1. Dacă, în schimb, te miști într-un volum cubic, probabilitatea scade la aproximativ 0,34 și continuă să scadă pe măsură ce crește dimensiunea spațiului în care te miști.

Acesta a devenit celebrul său *Calcul al probabilităților relative la plimbarea aleatorie pe o rețea de străzi* (1921): în două dimensiuni nu poți să te pierzi, dar în trei sau mai multe dimensiuni este foarte probabil să te pierzi. Acest lucru explică de ce oamenii beți reușesc întotdeauna să se întoarcă acasă în Los Angeles,

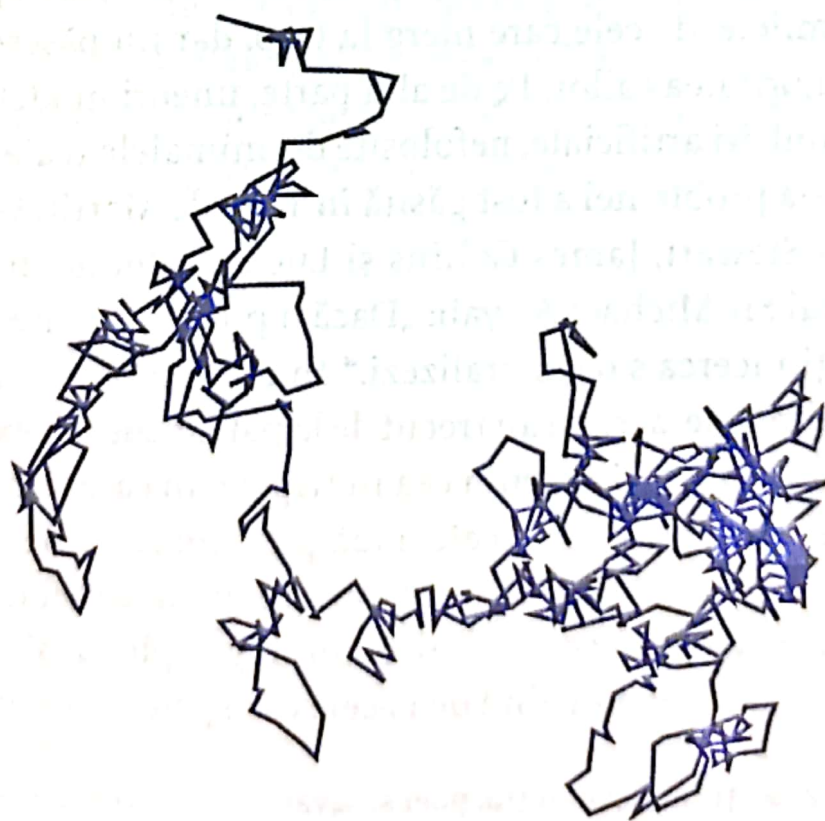


Plimbări aleatorii în două și trei dimensiuni

unde casele sunt joase și orașul e practic bidimensional, dar nu și în New York, unde zgârie-norii fac orașul efectiv tridimensional. Și explică de ce majoritatea catalizatorilor sunt bidimensionali: pentru că atunci există certitudinea că reactivii pe care dorești să-i catalizezi în reacții se vor întâlni la un moment dat, în timp ce în trei dimensiuni probabilitatea ar fi doar puțin peste o treime.

Trecând de la foi cu pătrățele discrete tot mai mici la foi cu puncte continue, printr-un proces de trecere la limită, obținem un model al *mișcării browniene* descoperite de botanistul Robert Brown care, în „Observații microscopice asupra grăunțelor de polen” (1828), a observat o oscilație stranie și neîncetată a unor grăunțe de polen suspendate în apă.

Ulterior, Albert Einstein a descris „Mișcarea particulelor în suspensie într-un lichid staționar conform teoriei cinetice moleculare a căldurii” (1905), reducând-o la un efect macroscopic produs asupra particulelor de mișcare aleatorie a moleculelor de apă. În trecut, a furnizat astfel și o dovadă indirectă a existenței



moleculelor: oricât ne-ar părea de ciudat azi, la începutul secolului XX existau încă fizicieni, ca Ernst Mach, de exemplu, care nu considerau moleculele decât ca „ficțiuni utile”.¹

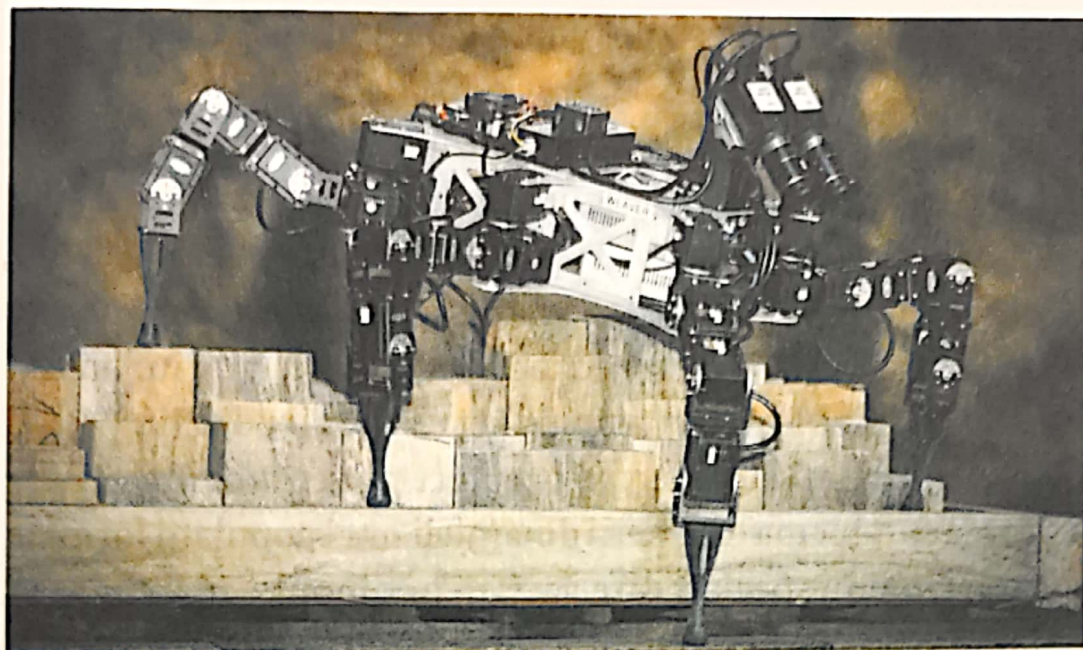
Pe lângă procesul macroscopic al plimbărilor aleatorii (*random walks*), matematica permite și modelarea procesului microscopic (sau, mai bine zis, fiziologic) care le produce, simulând mișcarea animalelor prin comportamentul rețelelor de oscilatori.

Primul ingredient este o clasificare a felurilor de a merge pe baza simetriilor mișcării lor: spațiale pentru picioare și temporale din punctul de vedere al ritmului. Cele mai simple, cum ar fi săritura, saltul, pasul și trapul, pot fi generate printr-o singură tranziție a rețelei, în timp ce cele mai complexe, cum ar fi galopul și canterul (galop ușor), necesită două.

Cel de-al doilea ingredient este determinarea structurii rețelei, care în modelele mai simple asociază un oscilator fiecărui picior. Cu toate că acest lucru funcționează bine pentru bipezi, aplicat la patrupezi modelul are probleme. Pe de o parte, pentru că tratează în mod simetric pasul și trapul, nu poate distinge animalele care pășesc, dar nu merg la trap, cum sunt cămilele, de cele care merg la trap, dar nu pășesc, cum sunt majoritatea cailor. Pe de altă parte, uneori modelul produce plimbări artificiale, nefolosite de animalele reale.

Soluția problemei a fost găsită în 1997 de Martin Golubitsky, Ian Stewart, James Collins și Luciano Buono, folosind deviza lui Sir Michael Atiyah: „Dacă o problemă pare insolubilă, poți încerca s-o generalizezi.” În cazul modului în care merg animalele, aceștia au trecut de la patrupele la hexapode, care adoptă mișcări precum cea în tripozi, în care fiecare pas face să se miște simultan cele două picioare extreme de pe o parte și cel central de pe cealaltă parte. Sau unda metacronică, în care fiecare pas face să se miște un singur picior, alternativ pe cele două părți, pornind de la cele din spate și ajungând în

1. Vezi secțiunea „Lucrețiu, poet și savant”.



față. S-a descoperit că pentru a modela mișcările hexapodelor sunt necesare două rețele de șase oscilatori fiecare, conectate în cerc: doi oscilatori pentru fiecare picior și o rețea circulară pentru fiecare parte.

Odată soluția găsită, s-a putut reveni la cazul patrupedelor, pe de o parte, și, în general, s-a putut trece la cazul centopedelor și al celor cu mii de picioare, pe de altă parte, rezolvându-le pe toate în mod analog. Dovadă că în matematică, înainte de a găsi ideea potrivită, se fac plimbări aleatorii, dar odată găsită, te lansezi în galop în direcția potrivită.

PRADĂ ȘI PRĂDĂTORI

Ecuția lui Volterra

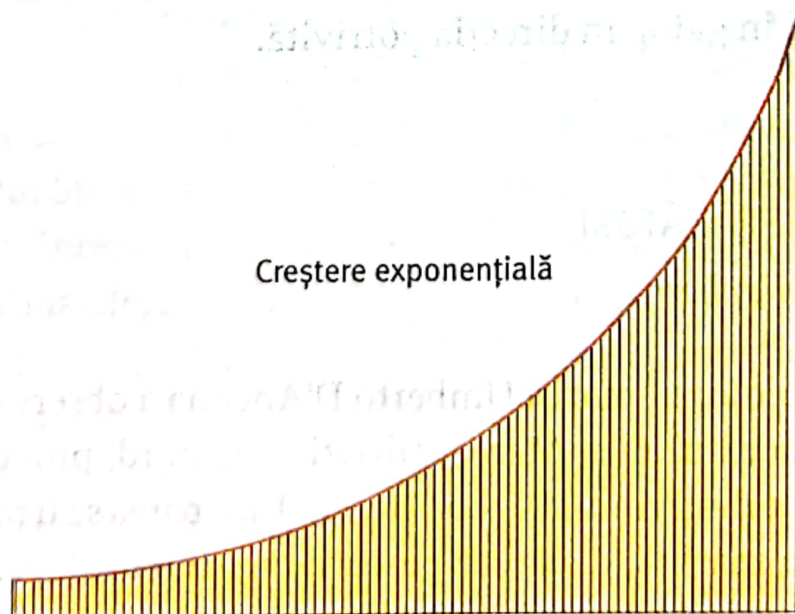
În 1926, biologul marin Umberto D'Ancona a observat că scăderea pescuitului în Marea Adriatică de nord, provocată de activitățile din Primul Război Mondial, nu părea să fi modificat populația marină, deoarece pescarii continuau să pescuiască aceeași cantitate de pește ca înainte. Cu toate acestea, părea să fi modificat raportul dintre prădători și prăzi, deoarece pescarii

pescuiau mai mulți pești de pradă și mai puțini dintre cei care hrăneau prădătorii.

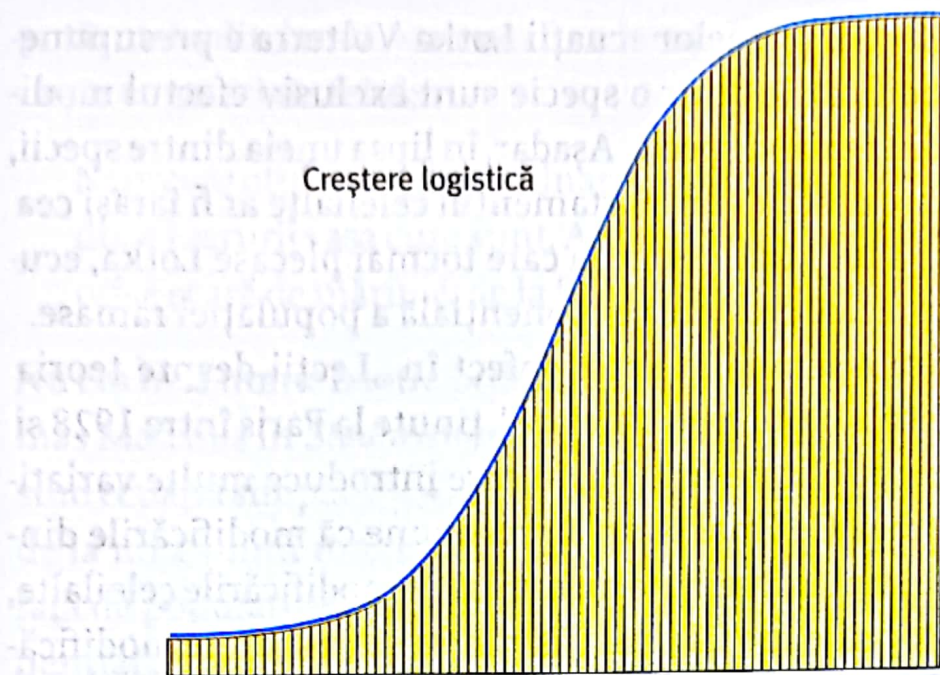
D'Ancona i-a propus socrului său, matematicianul Vito Volterra, să explice matematic fenomenul, iar acesta a găsit rapid un model al sistemului pradă-prădător care a devenit celebru, bazat pe ceea ce este cunoscut astăzi drept *ecuația Lotka-Volterra*: Alfred Lotka găsisese aceeași ecuație independent cu un an înainte, dar a ajuns la ea dintr-un punct de pornire diferit.

Plecând de la studiul reacțiilor autocatalitice în chimie, Lotka a abordat problema descrierii dinamicii unei populații formate dintr-o singură specie x care variază în timpul t : în ipoteza că natalitatea și mortalitatea sunt constante, se ajunge imediat la ecuația $dx/dt = ax$, care are ca soluție creșterea exponențială nerealistă prezisă de Malthus în *Studiu asupra principiului populației* (1798). În ipoteza mai realistă a unei creșteri neconstante, din cauza limitării resurselor, se poate presupune, în prima aproximație, că aceasta scade liniar. Astfel, Lotka a ajuns în 1910 la ecuația $dx/dt = ax(1 - x)$, *ecuația logistică*, descoperită deja de Pierre François Verhulst în „Notă asupra legii după care are loc creșterea unei populații” (1838), care prevedea că populația tinde să se stabilizeze la o valoare-limită.¹

Creștere exponențială

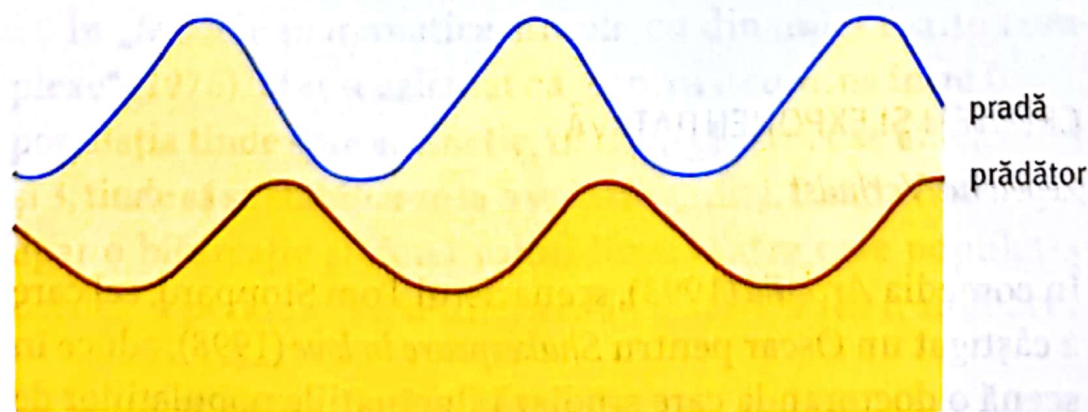


1. Vezi secțiunea „Creșteți și exponențiați-vă”.



Trecând la cazul a două specii, x și y , Lotka și Volterra au presupus în primul rând că cele două specii interacționează simetric: creșterea prădătorilor y duce la scăderea prăzii x , în timp ce creșterea prăzii x duce la creșterea prădătorilor y . Presupunând iarăși, în primă aproximație, că aceste efecte reciproce sunt liniare, se ajunge la ecuațiile $dx/dt = ax(1 - y)$ și $dy/dt = by(x - 1)$.

Acestea au fost studiate aproape simultan de Lotka în „Elemente de biologie fizică” (1925) și de Volterra în „Variații și fluctuații ale numărului de indivizi în specii de animale care trăiesc împreună” (1926). Spre deosebire de cazul unei singure specii, de data asta soluțiile prezic posibilitatea unei oscilații a celor două populații, în acord cu observațiile pe care D’Ancona îl rugase pe Volterra să i le explice.



Un defect al primelor ecuații Lotka-Volterra e presupunerea că modificările dintr-o specie sunt exclusiv efectul modificărilor din cealaltă specie. Așadar, în lipsa uneia dintre specii, ecuația care descrie comportamentul celeilalte ar fi iarăși cea nerealistă a lui Malthus, de la care tocmai plecase Lotka, ecuație care prezice creșterea exponențială a populației rămase.

Volterra a semnalat acest defect în „Lecții despre teoria matematică a luptei pentru viață”, ținute la Paris între 1928 și 1929, lecții publicate în 1931, în care introduce multe variațiuni ale temei. Cea mai simplă presupune că modificările dintr-o specie sunt influențate nu numai de modificările celeilalte, ci și de propriile modificări. Păstrându-se în cadrele modificărilor liniare, în acest caz se ajunge la ecuații mai realiste: $dx/dt = ax(1 - x - y)$ și $dy/dt = by(1 - x - y)$, care sunt, față de ecuația logistică, ceea ce sunt primele ecuații Lotka-Volterra față de ecuația malthusiană.

Volterra a considerat încă alte multe extinderi ale ecuațiilor originare, tratând, pe de o parte, un număr arbitrar de specii interdependente, pe de altă parte, posibilele efecte întârziate ale schimbărilor produse de o specie asupra alteia. În acest din urmă caz, nu mai e vorba despre ecuații diferențiale, ci despre ecuații integro-diferențiale, cum se vede în articolul său „Echilibrul general al conflictului biologic în cazul acțiunilor istorice” (1939), publicat cu un an înainte să moară, punctul final al unei îndelungate meditații asupra aplicațiilor matematicii în biologie.

CREȘTEȚI ȘI EXPONENȚIAȚI-VĂ

Legea lui Verhulst

În comedia *Arcadia* (1993), scenaristul Tom Stoppard, cel care a câștigat un Oscar pentru *Shakespeare in love* (1998), aduce în scenă o doctorandă care studiază fluctuațiile populațiilor de

potârnicchi din landă, iar metafora haosului determinist îi stârnește cugetări de felul:

Neprevăzutul și predeterminarea conlucrează pentru a produce lucrurile așa cum sunt. Așa se creează pe sine natura, la orice scară de mărime, de la fulgul de zăpadă până la vijelie.

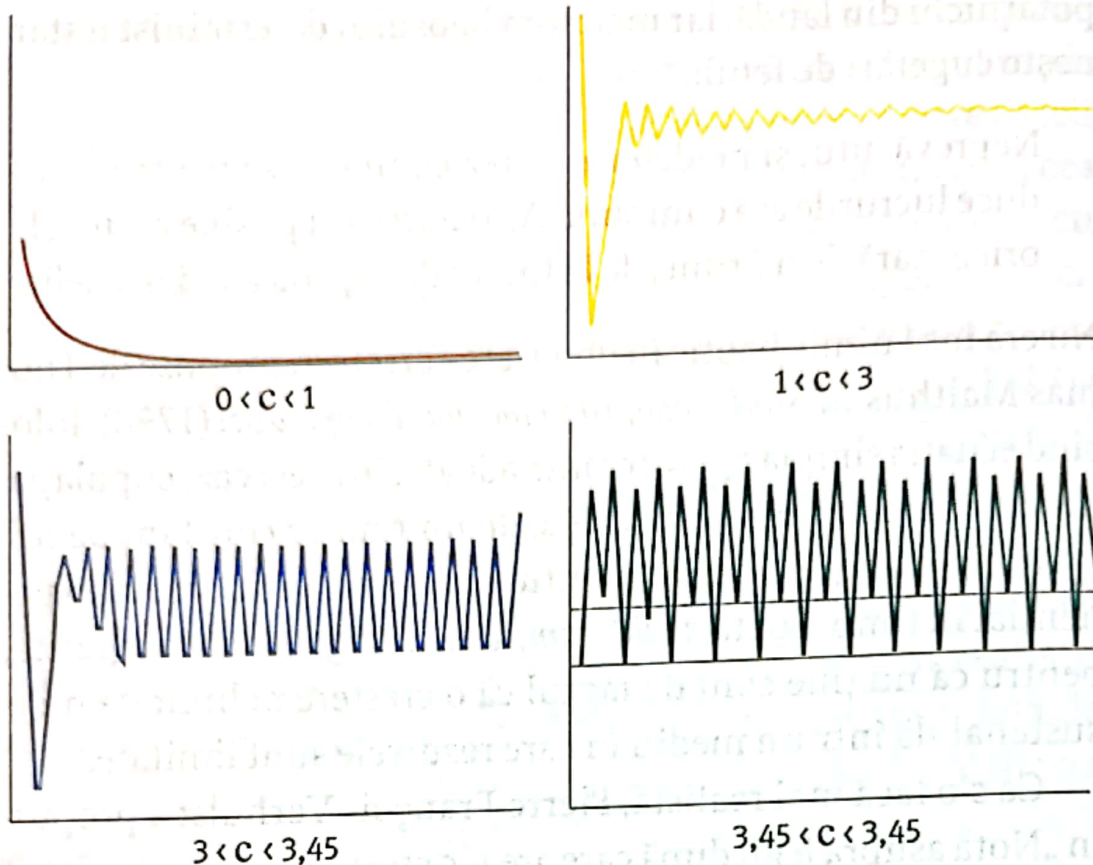
Nu era însă nimic haotic în descrierea creșterii propuse de Thomas Malthus în *Studiu asupra principiului populației* (1798), folosind ecuația simplă $x_{n+1} = cx_n$: într-adevăr, în acest caz, populația de la un anumit moment crește de un număr constant de ori față de populația de la momentul anterior, așadar crește exponențial în timp. Luată *ad litteram*, această lege e evident greșită, pentru că nu ține cont de faptul că o creștere nelimitată nu e sustenabilă într-un mediu în care resursele sunt limitate.¹

Ca s-o facă mai realistă, Pierre-François Verhulst a propus în „Notă asupra legii după care are loc creșterea unei populații” (1838) o funcție logistică descrisă de ecuația $x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$, în care factorul $(1 - x_n)$ scade când crește x_n , și viceversa, contribuind la încetinirea unei creșteri în exces și stimulând o creștere lentă. Evident, prețul plătit pentru o descriere mai realistă e trecerea de la o dependență liniară la una pătratică.

Primul studiu al comportamentului funcției logistice în raport cu constanta de creștere c , care trebuie să fie între 0 și 4 ca populația să fie normalizată între 0 și 1, a fost întreprins de biologul Robert May, cel care a fost apoi consultant științific pentru *Arcadia*.

În „Modele matematice simple cu dinamici foarte complexe” (1976), May a calculat că, pentru c cuprins între 0 și 1, populația tinde spre extincție, în timp ce dacă c se află între 1 și 3, tinde să se stabilizeze la o valoare-limită. Când c trece de 3, apar o bifurcație și două valori-limită între care populația oscilează periodic. La o ulterioară creștere a lui c , numărul

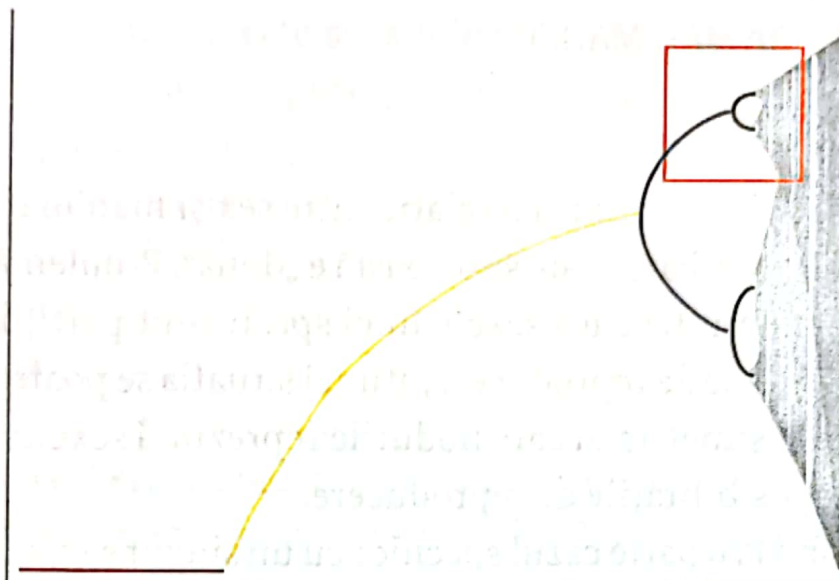
1. Vezi secțiunea „Creștere hiperbolică”.



valorilor-limită se dublează încă mai repede: la 3,45 devin patru, la 3,54 opt, la 3,56 șaisprezece și așa mai departe, producând o „cascadă a dublării perioadei“.

Viteza de dublare poate fi măsurată în funcție de distanța dintre două puncte de bifurcație, care scade de la 0,45 la 0,09, apoi la 0,02 și așa mai departe. În 1976, Mitchell Feigenbaum a descoperit că raportul a două distanțe consecutive, care în primele două cazuri e 5 și 4,5, tinde la un număr irațional egal cu aproximativ 4,67, numit azi chiar *numărul Feigenbaum*, o veritabilă constantă universală apărând în toate sistemele care prezintă fenomene similare de dublare a perioadei.

În 1975, Tien-Yien Li și Jim York au descoperit că și valorile lui c pentru care apar bifurcații ulterioare tind către o limită irațională, de aproximativ 3,57: dincolo de această valoare, comportamentul populației devine incontrollabil, oscilând haotic, fără să mai tindă către vreo limită. Astfel, această valoare a lui c marchează trecerea de la un comportament regulat (chiar



dacă din ce în ce mai complicat) la unul haotic și extrem de dependent de valoarea de plecare.

Toată povestea asta se poate vizualiza în așa-numitul *arbore Feigenbaum*, care arată valorile la care populația se stabilizează sau oscilează, în funcție de valorile constantei de creștere. Zona gri corespunde haosului, petele albe prezente în ea corespund unor zone de „ordine în haos”: printre ele găsim, de exemplu, comportamente periodice cu perioade neegale și respectivele cascade de dublări, evident, toate cu viteză tinzând la numărul Feigenbaum.

Așa cum se poate intui din figură, arborele Feigenbaum e un fractal: un analog real al mulțimii de numere complexe a lui Mandelbrot și, la fel ca aceasta, universal, descriind așadar comportamentul sistemelor descrise nu doar de funcția logistică, ci de orice ecuație „local pătratică”. Nu e deci de mirare că funcția logistică și-a găsit aplicații în cele mai diferite domenii: de la dezvoltarea demografică la evoluția sistemelor teritoriale, de la răspândirea bolilor sau a produselor comerciale la turbulența fluidelor.

E clar că există cel puțin o relație între sex și matematică: răspunsul la întrebarea câte sexe există e „două”. Problema e dacă există mai multe: dacă sexele unei specii sunt partițiile indivizilor în clase de reproducere, atunci situația se poate descrie cu un graf simetric în care nodurile reprezintă sexele, iar muchiile – posibilitățile de reproducere.

Lăsând la o parte cazul speciilor cu un singur sex, adică cele cu reproducere sexuată hermafrodită, natura pare să favorizeze grafurile complete nonreflexive: în care, adică, nici un nod nu e conectat la el însuși, ci fiecare e conectat cu toți ceilalți. Și numărul de sexe poate varia de la zero (inclusiv: pentru speciile cu reproducere asexuată) la infinit (exclus): de exemplu, mamiferele au 2, unele tipuri de melci 13, iar ciupercile cu pălărie au chiar 10.000.

Pentru specii precum a noastră, cu un echilibru numeric substanțial între sexe, situația cea mai puțin favorabilă din punct de vedere evolutiv este tocmai aceea cu doar două sexe: în acest caz, fiecare individ se poate împerechea cel mult cu jumătate din populație. Și, așa cum știm cu toții, problema devine atunci căutarea și alegerea partenerului: în special, dacă credem că „Dumnezeu îi face și apoi îi împerechează”, vom căuta printre cei asemănători nouă, iar dacă credem că „opusele se atrag”, vom căuta printre cei diferiți de noi.

Donn Byrne și Don Nelson au descoperit că „Atracția este o funcție liniară a proporției de întărire pozitivă” (1965), în sensul că relația dintre atracția a și asemănarea percepută s (prescurtarea vine de la „similaritate”) este $a = 5,44s + 6,62$. Cu alte cuvinte, atracția pe care o exercităm asupra altei persoane nu depinde de numărul de aspecte asupra cărora aceasta e de acord cu noi, ci de procentajul lor în raport cu totalul: așadar, în timpul curtării, e

bine să evităm subiecte sensibile și să producem în schimb multe subiecte care nu presupun confruntare.

Atracția determină posibیلی candidați ai inimii, dar adevărata problemă e cum să alegi dintre ei iubirea vieții tale. Sau, matematic vorbind, cum să alegi un număr dintr-un șir finit care e generat pas cu pas, astfel încât să maximizezi probabilitatea ca numărul ales să fie maximumul întregului șir, inclusiv numerele care n-au fost încă generate.

John Gilbert și Frederick Mosteller au rezolvat problema „Cum să recunoști maximumul unui șir” (1966): dacă șirul are n elemente, se sare peste aproximativ n/e , unde $e \approx 2,718$ este baza logaritmilor naturali, apoi se ia primul element care apare și este mai mare decât toate celelalte. De exemplu, dacă există 100 de elemente, se alege după primele 37. În viață, unde în general avem mai puține ocazii și ne mulțumim chiar și cu mai puțin decât cel mai bun, alegerea partenerului definitiv după aproximativ zece încercări ar trebui să fie suficientă.

Odată ales partenerul, problema devine să reușești să-l păstrezi. În „Accesul la universitate și stabilitatea căsniciei” (1962), David Gale și Lloyd Shapley au folosit teoria jocurilor pentru a arăta că, în cele din urmă, căsniciile devin social stabile, în sensul că fiecare persoană se așază cu partenerul său respectiv.

Există însă un preț de plătit: această stabilitate e atinsă doar printr-o lungă serie de divorțuri și căsătorii, în care fiecare caută și găsește potențiali parteneri pe care îi preferă celui actual, și care îi preferă pe el sau ea în locul partenerilor lor actuali. În cel mai rău caz, numărul de divorțuri și căsătorii este egal cu produsul posibیلilor parteneri: de exemplu, la o populație de zece milioane de femei și zece milioane de bărbați, avem aproximativ o sută de miliarde de divorțuri și căsătorii, spre fericirea tribunalelor și a consiliilor locale (sau al Sacra Rota, unul dintre cele trei tribunale ale Bisericii Catolice).

Dar ce se întâmplă cu viața amoroasă dintre doi parteneri mai mult sau mai puțin stabili? Un model matematic simplu

a fost construit de Steven Strogatz în „Povești de dragoste și ecuații diferențiale” (1988): dacă îi numim pe cei doi îndrăgostiți Julieta și Romeo, se poate imagina că variația în timp a iubirii unuia depinde liniar de propria iubire și de iubirea celuilalt. De exemplu, în cazul lui Romeo, ajungem la o ecuație diferențială de tipul $dR/dt = aR + bJ$, și analog în cazul Julietei.

Avem deci 4 parametri de determinat, cu 3 alegeri posibile (valoare pozitivă, nulă, negativă) pentru fiecare: astfel obținem 81 de modele posibile, fiecare cu propriile echilibre sau dezechilibre. Parafrazându-l pe Tolstoi,¹ „toate iubirile neschimbate se aseamănă între ele, fiecare iubire schimbătoare se poate schimba în 80 de feluri diferite”.

1. Vezi secțiunea „Principiul Annei Karenina”.

ECONOMIE POLITICĂ

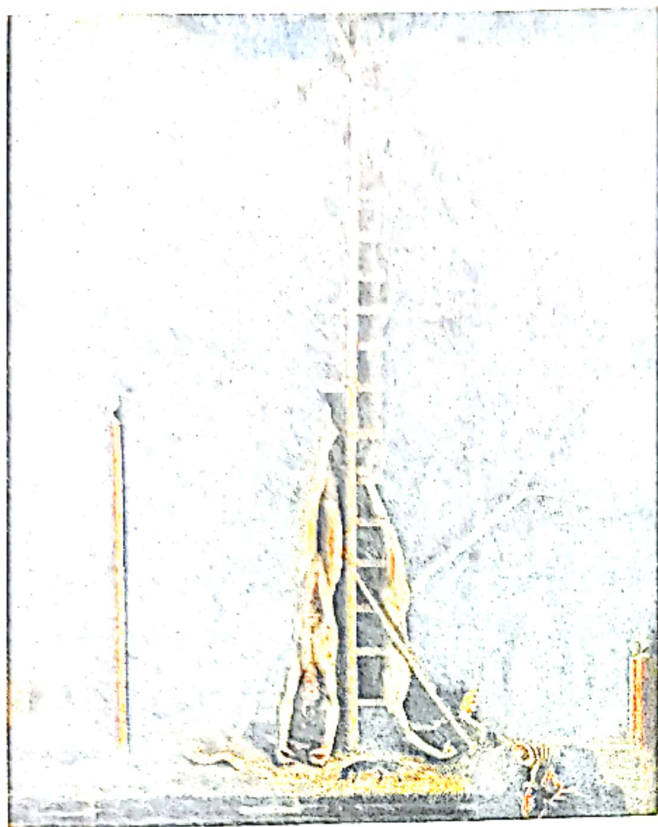
TE ASIGUR CĂ RENTEAZĂ

Matematica actuarială

Faptul că asigurările prosperă prin uzul sau abuzul matematicii e bine-cunoscut. Totuși, mai puțin cunoscut este cine a adus primele contribuții teoretice la practica asigurărilor. Și surpriza e că, la început, găsim două nume faimoase pentru cu totul alte motive: unul olandez, Jan de Witt, și celălalt englez, Edmond Halley.

Primul a fost unul dintre puținii lideri politici din istorie cu o pregătire matematică, alături de irlandezul Éamon De Valera. Cultura matematică a lui de Witt nu l-a împiedicat totuși să cadă în dizgrație și să-și încheie o perioadă de două decenii de putere republicană în stilul lui Mussolini: a fost spânzurat cu capul în jos la 20 august 1672, împreună cu fratele său Cornelis, după ce a fost linșat și dezmembrat de mulțime la Haga. Un tablou contemporan care arată *Cadavrele fraților de Witt*, atribuit lui Jan de Baen, poate fi văzut astăzi la Rijksmuseum din Amsterdam. Povestea sfârșitului lor trist a fost relatată de Alexandre Dumas în romanul *Laleaua neagră* (1850).

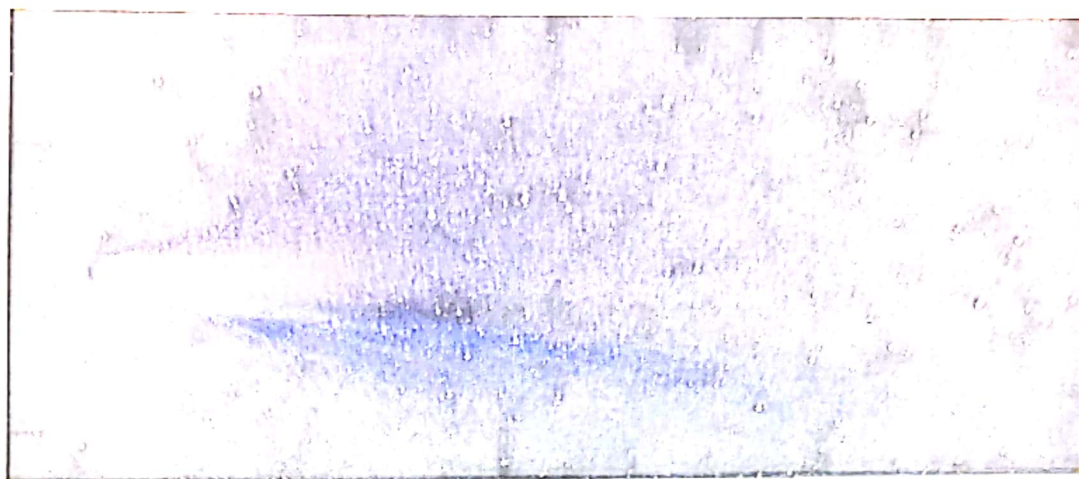
Cu un an înainte să moară, de Witt a publicat un studiu despre *Valoarea rentelor viagere în comparație cu titlurile răscumperate* (1671), care a făcut senzație. La acea vreme, atât titlurile, cât și rentele erau gestionate de stat care, în ambele cazuri, primea un capital în avans. În cazul titlurilor, capitalul era



*Cadavrele fraților de Witt,
de Jan de Baen*

returnat integral și cu o anumită dobândă la sfârșitul unui interval prestabilit, așa cum se practică și astăzi cu obligațiunile de stat pe termen lung. În cazul rentelor, capitalul era returnat în rate sub forma unei rente viagere, care, surprinzător, nu ținea cont de vârsta beneficiarului. Nu e surprinzător, așadar, că 80% dintre beneficiarii nominali aveau mai puțin de douăzeci de ani, iar 50% chiar sub zece!

Problema era că nu se știa cum să se calculeze valoarea unei rente viagere, și de Witt a rezolvat-o luând în considerare atât dobânzile compuse, cât și speranța de viață. Pentru a evalua aceasta din urmă, a avut ideea de a împărți populația decedată într-un an în anumite grupe de vârstă și de a considera distribuția deceselor ca măsură a probabilității de a muri la o anumită vârstă în acel an. Mai precis, probabilitatea de a mai trăi încă n ani după o anumită vârstă este raportul dintre numărul celor care mor cu n ani în plus și numărul celor care au acea vârstă. Iar speranța de viață este suma, pentru fiecare n , a produsului dintre n și probabilitatea de a mai trăi încă n ani.



Pentru a determina valoarea unei rente viagere destinate unei persoane, trebuie calculat cât ar primi acea persoană dacă ar mai trăi încă n ani, apoi înmulțit rezultatul cu probabilitatea ca aceasta să moară după n ani și, în fine, se însumează după fiecare n . De Witt a făcut acest lucru și a observat că, la rata dobânzii curente, statul vindea rente viagere la un preț mai mic decât cel calculat cu metodele sale. Cu toate acestea, precizia acestor metode se baza pe exactitatea evaluării speranței de viață, pe care De Witt o estima în acea perioadă ca fiind pur și simplu constantă până la vârsta de 50 de ani, apoi descrescând treptat în deceniile următoare 51–60, 61–70 și 71–80.

E momentul în care intră în scenă Edmond Halley, astronomul regal care și-a legat numele de faimoasa cometă. Rafinând teoria dezvoltată de Newton în *Principia* (1687)¹, el a reușit să observe că cele trei comete apărute în 1531, 1607 și 1682 erau de fapt una și aceeași, să calculeze perioada lor de aproximativ 75 de ani și să prevadă revenirea lor în 1758, așa cum avea să se și întâmple. Dar Halley a fost și eminența cenușie din spațiile capodoperei lui Newton, deoarece el l-a încurajat pe savant să rezolve problema orbitei planetelor, l-a convins să-și scrie descoperirile, a finanțat publicarea cărții și a scris oda entuziastă în chip de prefață.

1. Vezi secțiunile „Cheia sistemului solar” și „Frivolități despre gravitație”.

Preocupările lui Halley cuprindeauă însă multe domenii: de la inventarea clopotelor subacvatice etanșe pentru scufundări în *Arta de a trăi sub apă*, furnizând aer pe fundul mării (1716), la *Estimarea gradului de mortalitate al omenirii, dedus din straniile tabelele despre nașteri și înmormântări în orașul Breslau*, împreună cu o încercare de a determina prețul rentelor viagere (1693). În afară de descoperirea unei metode similare cu cea a lui De Witt, această ultimă lucrare a furnizat și primul veritabil studiu demografic bazat pe date reale, în loc de presupuneri.

A fost considerată pe bună dreptate o capodoperă, făcând uitată întâietatea lui De Witt, iar metodele ei probabilistice sunt folosite și astăzi. Evident, fără a putea evita cazurile patologice: cum ar fi cel al doamnei Jeanne Calment din Arles, care în 1965, la 90 de ani, și-a cedat casa pentru o rentă viageră, și a murit în 1997 la vârsta de 122 de ani, după ce a încasat de două ori valoarea casei.

STUDIUL EPIDEMIILOR

Modelul lui Bernoulli

Vaccinarea antivariolică a fost introdusă în 1796 de Edward Jenner, după ce a descoperit că, dacă un individ se infecta cu variola bovină (de unde și provine cuvântul *vaccin*), devenea imun la variola umană. Anterior, se folosea o practică diferită, numită *inoculare* sau *variolizare*, care consta în infectarea unui individ cu o formă slabă de variolă umană, numită *minor*, pentru a obține o imunitate parțială împotriva formei mai puternice și letale, numită *major*.

Au fost multe discuții și împotriviri, deoarece, în această practică periculoasă, se infectau totuși subiecți sănătoși cu variolă, care făcea multe victime chiar și în forma ei slabă, deși într-o măsură semnificativ mai redusă decât în forma puternică. Daniel Bernoulli a efectuat astfel o „Analiză a mortalității

provocate de variolă și a avantajelor inoculării pentru prevenirea ei" (1760) și a încercat să cuantifice avantajul unui tratament administrat tuturor încă de la naștere.

Rezultatul calculului său a arătat că inocularea ducea la o creștere de trei ani a speranței de viață, de la 27 la 30 de ani, și la mai mult decât dublarea vârstei mediane, de la 12 la 25 de ani. Prin urmare, exista un interes evident pentru efectuarea inoculării la nivel individual și pentru impunerea acesteia la nivel social.

Pentru a-și face calculul, Bernoulli a introdus o serie de concepte care au devenit ulterior locuri comune în modelarea matematică a epidemiilor: mortalitatea (procentajul de morți în populație), susceptibilitatea (procentajul de persoane neimune și nevindicate), contagiozitatea (procentajul de infectați între cei susceptibili), letalitatea (procentajul de morți între cei infectați) și așa mai departe.

Cu toate acestea, utilizarea probabilităților în chestiunile care țin de oameni, și în special în medicină, este discutabilă. Primul care a pus-o în discuție a fost Jean Baptiste d'Alembert¹ care, în *Memoriu despre aplicarea calculului probabilităților la vaccinarea antivariolică* (1761), a propus un experiment mental simplu pentru a evidenția problema abordării lui Bernoulli.

Să presupunem, de exemplu, că există un tratament medical care are aceeași probabilitate ($1/2$) de a provoca moartea unui pacient sau de a-i asigura prelungirea vieții până la 200 de ani. Un astfel de tratament generalizat ar ridica speranța de viață medie a populației la 100 de ani (în prezent, în Italia, este sub 85), dar câți ar fi dispuși să se supună voluntar acestui tratament?

Abordarea lui Bernoulli era statică, dar introducea indirect o dinamică prin stratificarea populației în categorii de vârstă. Astăzi, se preferă o abordare dinamică direct legată de timp,

1. Vezi secțiunea „Arta de a greși la calcule“.

acesteia. Prototipul a fost introdus de William Kermack și Anderson McKendrick în *O contribuție la teoria matematică a epidemiilor* (1927) și descrie, prin ecuații diferențiale simple, dependențele reciproce dintre numărul de susceptibili (S), numărul celor imuni (I) natural sau prin vaccinare, și numărul celor care nu mai trebuie luați în calcul (R) ca vindecați sau decedați.

Modele precum acesta au fost utilizate în timpul pandemiei de Covid-19 pentru a simula curbele de infectare, de vindecare și deces, și pentru a planifica și organiza campaniile de vaccinare, în conformitate cu avertismentul lui Bernoulli:

Când sănătatea omenirii este în joc, nu trebuie să se ia decizii fără a efectua toate analizele și calculele necesare.

O CONSTITUȚIE SĂNĂTOASĂ ȘI ROBUSTĂ

Principiul lui Jefferson

În 1776, Thomas Jefferson, viitorul al treilea președinte al Statelor Unite, a redactat prima versiune a *Declarației de independență*, a cărei aprobare în Congresul din Philadelphia a marcat la 4 iulie nașterea Statelor Unite ale Americii. Jefferson nu a participat însă direct la elaborarea Constituției, care a fost aprobată de Convenția din Philadelphia în 1787; așa cum relatează filmul lui James Ivory *Jefferson in Paris* (1995), el și-a petrecut cei cinci ani între 1785 și 1789 la Paris, ca diplomat al noii republici.

Chiar dacă a trebuit să privească de la distanță desfășurarea Revoluției Americane, Jefferson a putut observa îndeaproape izbucnirea Revoluției Franceze și să-i influențeze direct pe unii dintre protagoniștii săi, în special pe marchizul Gilbert de La Fayette, care, la rândul său, luptase în Statele Unite ca general în armata lui George Washington, devenind primul „erou al celor două lumi” din istorie. Jefferson și La Fayette au

scris împreună celebra *Declarație a drepturilor omului și cetățeanului*, emisă de Adunarea Națională la 26 august 1789, care nu întâmplător reflecta *Declarația de independență* americană.

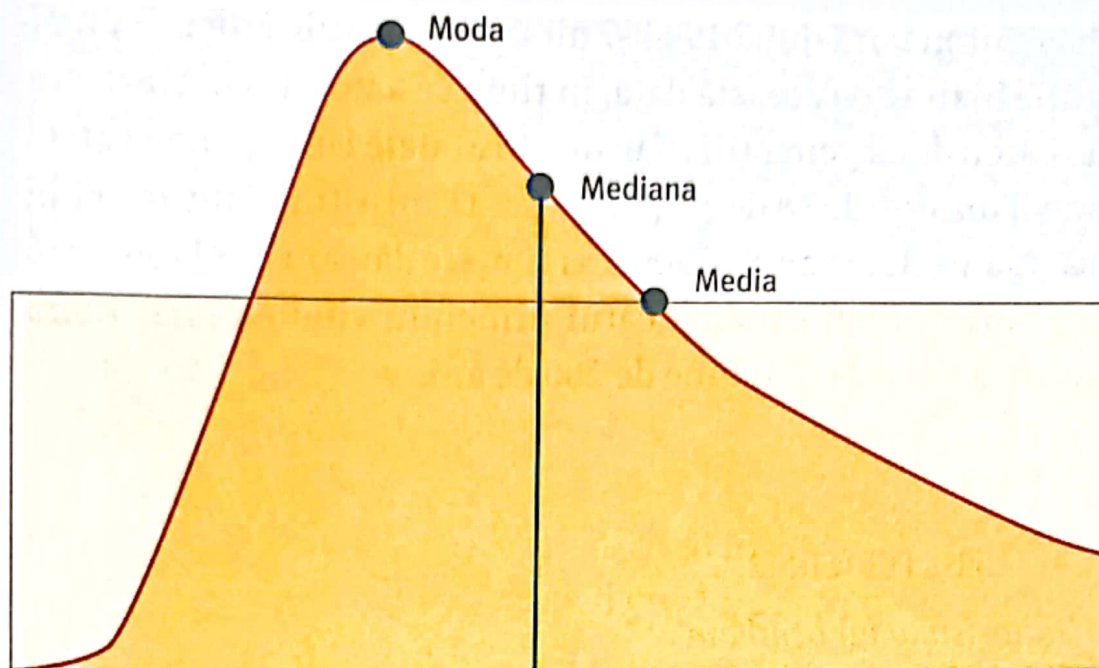
Jefferson s-a întors în Statele Unite în luna următoare și, în așteptarea plecării sale, i-a scris pe 6 septembrie o scrisoare lui James Madison, viitorul al patrulea președinte, în care medita asupra rolului noii constituții a Statelor Unite, care fusese ratificată și adoptată cu doar câteva luni în urmă.

Vizionar, ca de obicei, el a enunțat în acest text ceea ce a devenit cunoscut sub numele de *principiul lui Jefferson*: „Pământul este dat în folosință celor vii, iar cei morți nu au puteri sau drepturi asupra lui.” Din care a dedus consecința „constituțiile și legile predecesorilor se sting natural odată cu aceia care le-au emis”, concept care a fost ulterior preluat de Constituția franceză din 1791, conform căreia „nici o generație nu are dreptul să supună legilor sale generațiile viitoare”.

Dacă acceptăm principiul lui Jefferson și consecințele sale, apare problema stabilirii duratei de viață a constituțiilor, după expirarea căreia acestea ar trebui să expire automat și să fie rescrise de noile generații, într-un fel de „revoluție permanentă” care să demoleze periodic ceea ce generațiile anterioare au construit. În scrisoarea sa, Jefferson a rezolvat problema printr-un calcul care anticipa procedeele a ceea ce va deveni ulterior matematica actuarială, folosită astăzi în mod obișnuit pentru încheierea asigurărilor de viață.¹

Datele pe care le-a folosit pentru calcule le-a obținut din unul dintre primele tabele de mortalitate, utilizat de contele George-Louis Leclerc de Buffon în *Eseu despre aritmetica morală* (1777), care clasifica vârstele la care au murit aproximativ 24.000 de persoane. Jefferson a utilizat tabelul pentru a estima ceea ce astăzi se numește mediana vieții: adică vârsta la care o populație se reduce la jumătate, în sensul că jumătate din locuitori mor

1. Vezi secțiunea „Te asigur că rentează”.



înainte de a atinge acea vârstă, iar cealaltă jumătate după aceea. Nu trebuie confundată cu viața medie, care este durata medie a vieții unei populații, obținută prin adunarea vârstelor la deces și împărțirea la numărul celor decedați. Nici măcar cu *moda*, care este vârsta la care moare cel mai mare număr de locuitori.

Prin stabilirea unui sistem de coordonate în care abscisele reprezintă anii de vârstă, iar ordonatele reprezintă numărul de persoane care mor la o anumită vârstă, tabelul de mortalitate se reduce la o curbă. Moda este punctul său de maxim. Mediana este punctul în care aria este împărțită în două părți egale. Iar media este înălțimea unei curbe constante care delimitează aceeași arie.

Jefferson a calculat mediana curbei trunchiate deasupra vârstei de 21 de ani (majoratul de atunci), care corespunde momentului în care alegătorii se reduc la jumătate, și dispăre majoritatea celor care au putut participa la ratificarea constituției. Deoarece mediana în Franța era sub 40 de ani, el a sugerat un termen de expirare a constituției de 19 ani.

Ar fi fost și mai simplu să se ia în considerare nu viața, ci vârsta mediană a populației, care în Italia este acum de 46 de ani: așadar, jumătate din populație s-a născut după 1976, a

devenit majoră după 1994 și nu a putut ratifica nici o constituție înainte de această dată, în timp ce a noastră datează din 1948, cu două generații în urmă. În Statele Unite, unde vârsta mediană este de 38 de ani, ratificarea Constituției nu ar trebui să fie anterioară anului 2002, în timp ce datează din 1789: anul scrisorii lui Jefferson, al cărui principiu vital a rămas literă moartă timp de mai bine de 200 de ani.

CALCULUL FERICIRII

Utilitarismul lui Bentham

Faimosul preambul al *Declarației de independență* a Statelor Unite din 4 iulie 1776 afirma:

Noi credem că aceste adevăruri sunt evidente în sine: că toți oamenii sunt creați egali, că au fost înzestrați de Creator cu anumite drepturi inalienabile, și printre acestea se numără Viața, Libertatea și urmărirea Fericirii.

Aceste cuvinte au fost preluate din *Declarația drepturilor din Virginia* din 12 iunie 1776, redactată de George Mason. Mai târziu, ele au apărut și în *Declarația de libertate* proclamată la 4 iulie 1859 de John Brown, susținător al abolirii sclaviei, celebrat în cântecul *Glory, glory, hallelujah!* (1862).

Faptul că viața și libertatea sunt două drepturi inalienabile ale omului a devenit de atunci un loc comun al democrațiilor, cel puțin în vorbe, dar dreptul la fericire nu a fost încă recunoscut: în special, nu de Constituția americană din 1787, pe care Mason a refuzat să o voteze, și nici măcar de Constituția italiană din 1947. Într-adevăr, fericirea este un concept subiectiv și relativ, dificil de cuantificat: de aceea era dificil să se dea un sens obiectiv și absolut ideii lui Mason, conform căreia „între toate modurile și formele diferite de guvernare, cea mai



Capul mumificat și scheletul îmbrăcat ale lui Jeremy Bentham, conservate la University College din Londra

bună este cea capabilă să producă cel mai mare grad de fericire și siguranță”.

Guvernul britanic nu a răspuns direct la *Declarația de independență a Statelor Unite*. L-a lăsat, în schimb, pe filozoful Jeremy Bentham să răspundă indirect într-un „Examen succint al Declarației” (1777), în care a ironizat ideea că ar fi suficient să se înființeze un guvern pentru a asigura aceste drepturi inalienabile menționate mai sus: „Ca și cum”, a observat el, „fiecare acțiune guvernamentală nu ar constitui de fapt o alienare a cel puțin unuia dintre acele drepturi”. În ceea ce privește ideea lui Mason de a maximiza fericirea, Bentham a observat că aceasta sugera posibilitatea de a matematiza politica, dar se confrunta cu dificultatea evidentă de a cuantifica cantitatea de maximizat.

Pentru a depăși dificultatea, în *Introducere în principiile moralei și ale legislației* (1780), Bentham a analizat principiul filozofic al maximizării fericirii și a introdus ideea unui calcul utilitar care să permită realizarea sa științifică. Propunerea sa

a fost să înlocuiască conceptul teoretic și vag de fericire cu noțiunea mai practică și precisă de utilitate, care putea fi măsurată algebric prin cuantificarea pozitivă a plăcerilor și negativă a neplăcerilor.

Apărea însă o problemă, care ar fi apărut și dacă plăcerile ar fi fost restrânse doar la câștigurile financiare și neplăcerile la pierderi: faptul că utilitatea nu este o funcție liniară, în sensul că o dublare a câștigului sau a pierderii nu produce o plăcere sau un disconfort dublu. Jakob Bernoulli descoperise deja acest lucru în *Ars conjectandi* (1713), observând principiul *utilității descrescătoare*: valoarea banilor nu e absolută, iar o sumă similară poate însemna mult pentru cine are puțin și puțin pentru cine are mult. Altfel spus, e mai costisitor să satisfaci în același mod un bogat decât un sărac, iar o aceeași sumă procură satisfacție mai mare unui anumit număr de săraci decât acelui număr de bogați.

Prima problemă în calculul utilitar a fost, așadar, stabilirea modului în care utilitatea scade: Bernoulli a arătat că în unele cazuri teoretice funcționa o scădere logaritmică, dar cum stăteau lucrurile în cazurile practice? O a doua problemă a fost ridicată de Henry Sidgwick în *Metodele eticii* (1874): trebuia maximizată utilitatea totală a unei întregi națiuni, sau utilitatea medie a cetățenilor săi? În fine, o a treia problemă a fost pusă de Wilfrido Pareto în *Manual de economie politică, cu o introducere în știința socială* (1906): în loc să atribuie utilități cardinale, care să stabilească cât valorizează un individ plăcerile și durerile luate separat, nu ar fi fost suficient să se considere utilități ordinale, pe care să le clasifice doar într-o ordine a preferințelor?

În secolul XX, utilitatea ordinală a devenit predominantă față de cea cardinală, iar calculul utilitar s-a diferențiat în trei domenii: teoria *utilității așteptate* a lui John Von Neumann și Oskar Morgenstern, teoria *alegerilor sociale* a lui Kenneth Arrow

și Amartya Sen¹, și teoria *utilitarismului preferințelor*, a lui John Harsanyi, care au contribuit la obținerea Premiilor Nobel pentru economie în 1972, 1998 și 1994, respectiv.

MATEMATICA PREZIDENȚIALĂ

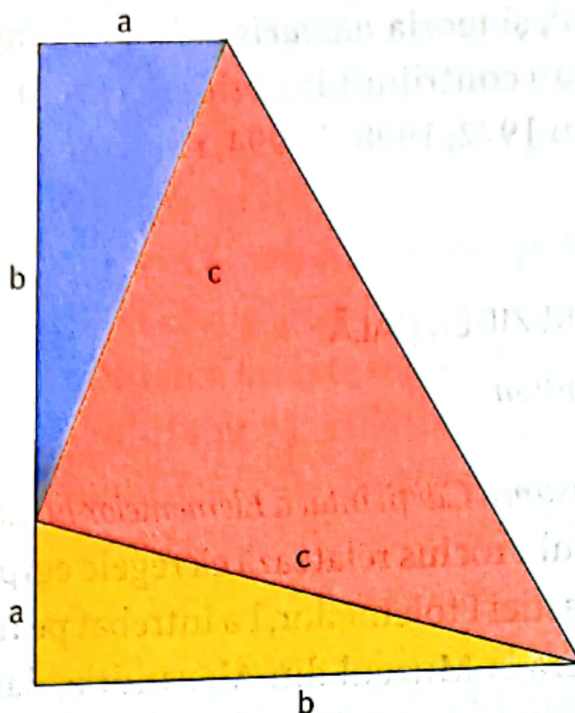
Metoda lui Hamilton

În *Comentariu asupra Cărții întâi a Elementelor lui Euclid* (aproximativ 450), filozoful Proclus relatează că regele egiptean Ptolemeu, fondatorul dinastiei Ptolemeilor, l-a întrebat pe matematicianul Euclid, care lucra la Muzeul din Alexandria, dacă există o cale scurtă de a învăța geometria, evitând celebrele sale *Elemente* (aproximativ –300). A primit însă răspunsul la fel de celebru: „Nu există căi regale către geometrie.” Se pare totuși că există căi prezidențiale către matematică, având în vedere numărul mare de rezultate descoperite de primii cetățeni ai Statelor Unite în ultimele două sau trei secole.

O adevărată bijuterie este demonstrația algebrică a teoremei lui Pitagora găsită de James Garfield pe când era încă deputat și publicată în *Journal of Education* (1876). Frumusețea stă în faptul că, deși teorema vorbește despre relația dintre trei pătrate, figura pe care se bazează demonstrația nu conține nici unul!

Într-adevăr, e suficient să se așeze două copii ale triunghiului dreptunghic dat astfel încât cele două catete să fie coliniare, iar cele două vârfuri corespunzătoare ipotenuzei să se atingă. Unind celelalte două vârfuri corespunzătoare ipotenuzei se obține un trapez, a cărui suprafață poate fi calculată cu formula cunoscută (media bazelor înmulțită cu înălțimea). Sau, echivalent, adunând suprafețele celor trei triunghiuri dreptunghice din care este compus trapezul, în construcție. Egalând

1. Vezi secțiunea „Un partid bun“.



cele două expresii astfel obținute pentru suprafață și simplificând, se obține teorema lui Pitagora în formă algebrică.

Despre demonstrația sa, Garfield a spus: „Cred că aceasta este ceva asupra căruia membrii ambelor camere pot fi de acord, fără distincție de partid.“ Acordul bipartizan nu s-a extins însă asupra deciziilor sale prezidențiale atunci când a fost ales, patru ani mai târziu, în 1880. În particular, pe 2 iulie 1881, un judecător, jignit că n-a fost numit consul, l-a împușcat. Cum razele X nu fuseseră încă descoperite, medicii au cerut ajutorul lui Graham Bell, inventatorul telefonului, care a construit un dispozitiv electric special pentru a localiza glonțul – din păcate, n-a funcționat: așa cum s-a descoperit ulterior, din cauza rețelei metalice a patului. Astfel, după ce a supraviețuit câteva săptămâni, președintele în vârstă de cincizeci de ani a murit la 19 septembrie.

Cu un secol înainte, în 1792, viitorul al treilea președinte, Thomas Jefferson¹, a propus, printr-o scrisoare adresată primului președinte, George Washington, o metodă de distribuire a

1. Vezi secțiunea „O constituție sănătoasă și robustă“.

locurilor parlamentare între colegiile electorale în funcție de populația lor. O metodă alternativă fusese propusă de Alexander Hamilton, în calitate de ministru al trezoreriei sub Washington, și funcționa după cum urmează. În primul rând, se calculează ponderea locurilor, împărțind populația la numărul de locuri disponibile. Apoi se calculează cota fracționară de locuri care revine fiecărui stat, împărțind populația sa la ponderea locurilor. Apoi cotele sunt rotunjite în jos, alocând fiecărui stat numărul minim de locuri la care avea dreptul. În cele din urmă, locurile rămase sunt distribuite statelor care au pierdut cel mai mult la rotunjire.

Metoda lui Hamilton a fost aprobată de Congres, dar Washington a opus vetoul său, pentru prima oară în istoria Statelor Unite. Astfel, a fost adoptată metoda lui Jefferson, care consta în împărțirea populației la o pondere a locurilor calculată diferit și determinată așa încât, după rotunjirile în jos, să nu mai rămână nici un loc. Ponderea lui Jefferson poate fi calculată prin încercare și eroare și este, desigur, mai mică sau egală cu cea a lui Hamilton.

Metoda lui Jefferson a fost folosită până în 1842, când s-a observat că încalcă un principiu fundamental al democrației: proporționalitatea. La fel se întâmplă și pentru o metodă în oglindă, propusă în 1822 de viitorul al șaselea președinte, John Quincy Adams, în care se face rotunjirea în plus în loc de minus.

Congresul a adoptat deci metoda inițială a lui Hamilton, care a rămas în vigoare până în 1941, dar și ea are o problemă: adăugarea de noi locuri face ca fiecărui stat să-i crească cota, dar nu cu aceeași rată procentuală. De exemplu, când numărul deputaților a crescut în 1880 de la 299 la 300, două state au obținut un loc nou, dar Alabama a pierdut unul!

Din nefericire, în cartea *Reprezentarea corectă: Cum să înfăptuim idealul „un om, un vot“* (1982), Michel Balinski și Peyton Young au demonstrat că nu există *nici o* metodă de distribuție a locurilor care să evite ambele probleme ale metodelor lui Jefferson, Adams și Hamilton. Constatând astfel că alfabetizarea

matematică a președinților nu e suficientă pentru a rezolva problemele insolubile, astăzi Statele Unite se mulțumesc cu președinți semianalfabeți, cum ar fi George W. Bush și Donald Trump.

UN PARTID BUN

Teoremele lui Arrow și Sen

În povestirea *Parlamentul* (1971), Jorge Luis Borges observa:

Un parlament evocă o problemă filozofică. Planificarea unei adunări care să reprezinte toți oamenii este ca și cum ai determina numărul exact al arhetipurilor platoniciene: o enigmă care a stârnit perplexitatea gânditorilor de secole.*

Borges a propus soluția paradoxală de a alege toți votanții pe viață: ideea lui era, prin urmare, că un parlament cu adevărat reprezentativ ar trebui să aibă un număr de locuri egal cu numărul alegătorilor. În practică însă, numărul alegătorilor este întotdeauna mult mai mare decât numărul locurilor disponibile, iar raportul dintre cele două numere este, de obicei, o fracțiune, nu un număr întreg.

Pentru a fi echitabilă, distribuția locurilor ar trebui să îndeplinească în primul rând un principiu de *proporționalitate*: numărul locurilor atribuite unei circumscripții în funcție de populație sau unui partid în funcție de voturi ar trebui să fie una din cele două aproximații (în minus sau în plus) ale raportului anterior. De exemplu, dacă locurile de atribuit sunt 10, un partid care obține o treime din voturi ar trebui să primească 3 sau 4.

A doua condiție evidentă de îndeplinit este *monotonia*: dacă un partid primește mai multe voturi decât altul, nu ar trebui

* În *Cartea de nisip*, Univers, București, 1983 (n. tr.).

să primească mai puține locuri. Iar acest lucru ar trebui să se aplice nu numai sincron, în alegerile individuale, raportat la procentajul de voturi, ci și diacronic, în alegeri diferite, raportat la raportul dintre procentajele de voturi. Dar rezultatul lui Balinski și Young menționat mai sus arată tocmai că nu există nici o metodă generală pentru a distribui locurile astfel încât să îndeplinească în același timp cele două condiții tocmai enunțate. Odată ce există cel puțin patru partide sau circumscripții și cel puțin șapte locuri în joc, există distribuții de voturi care fac acest lucru imposibil.

Evident, principiul de proporționalitate este încălcat de toate legile electorale majore, care au, oricum, multe alte probleme. De exemplu, se poate ca un partid cu puțin sub 50% din voturile naționale să nu obțină nici un loc, iar fiecare loc să fie obținut doar de partidele cu o reprezentare națională minimă. Este suficient ca în fiecare colegiu același partid național să obțină 50% minus un vot, iar un partid local să obțină 50% plus un vot, astfel încât acel loc să aparțină celui de-al doilea, iar primul să nu primească niciodată vreunul.

O altă problemă a sistemelor majoritare este că ele tind să agrege forțele politice în două tabere opuse. Consecințele nefaste devin evidente imediat ce se compară o campanie electorală a celor doi poli cu vânzarea de înghețată pe o plajă lungă de un kilometru. Aranjarea optimă a doi vânzători de înghețată ar fi la 250 de metri de extremități, deoarece astfel nici unul dintre cei care fac baie n-ar trebui să meargă mai mult de 250 de metri pentru a-și cumpăra înghețată. Dar, dacă unul din vânzători se mișcă puțin spre centrul plajei, nu pierde clienți către extremitatea sa și fură câțiva de la concurent. Deoarece situația e simetrică, prin mișcări reciproce, cei doi vânzători de înghețată ajung amândoi în centrul plajei, lăsându-i pe cumpărătorii din extremități descoperiți, iar pe cei din centru prea acoperiți.

Cât despre mecanismul de alegere a câștigătorului unor alegeri pe baza voturilor acordate, teorema demonstrată de Kenneth Arrow în cartea *Alegeri sociale și valori individuale* (1951) arată că nu există sisteme care să îndeplinească condițiile minime care sunt de obicei cerute democrației. În particular, libertatea de alegere a votanților, fiecare având dreptul de a alege liber candidatul preferat. Principiul unanimității, care impune alegerea unui candidat preferat de toți votanții. Principiul independenței față de alternative irelevante, care leagă alegerea câștigătorului doar de voturile exprimate, nu și de alți factori. Și lipsa unui dictator, ale cărui preferințe individuale să coincidă sistematic cu alegerile sociale.

De fapt, lucrurile stau și mai rău. În articolul „Imposibilitatea unui paretian liberal” (1970), Amartya Sen a demonstrat că primele două condiții anterioare sunt deja incompatibile cu posibilitatea ca, într-o societate, mai mult de o persoană să aibă drepturi. Lucrul este evident în cazul drepturilor referitoare la aceeași alternativă: dacă doi indivizi au amândoi un drept cu privire la alegerea între A și B, este suficient ca unul să aleagă A și celălalt B pentru a obține o contradicție. Cazul drepturilor referitoare la alternative diferite este puțin mai complicat, dar duce, de asemenea, la o contradicție.

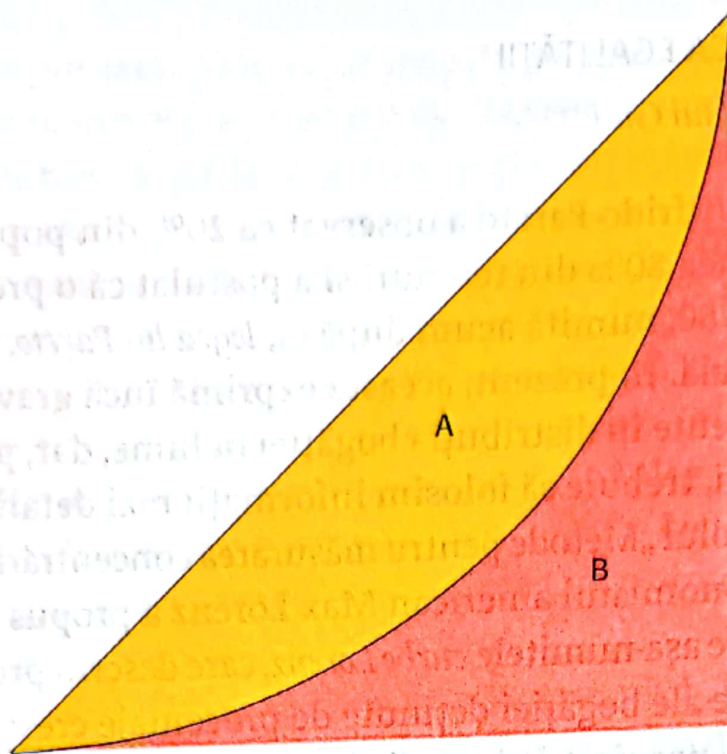
Din păcate, teorema lui Sen lasă puține alternative. Dacă nimeni nu are drepturi, cu siguranță nu suntem într-o democrație. Dar, dacă cineva are drepturi, din demonstrația lui Sen rezultă că le are doar el, și doar el, și suntem într-o dictatură. Într-un fel sau altul, asta înseamnă că democrația nu este altceva decât un *flatus vocis*: adică, ar fi o idee frumoasă, dar, din păcate, nu are nici un ecou în realitate.

În 1897, Wilfrido Pareto a observat că 20% din populația italiană deținea 80% din terenuri și a postulat că o proporție similară, 20/80, numită acum după el, *legea lui Pareto*, este mult mai generală. În prezent, aceasta exprimă încă gravele inegalități existente în distribuția bogăției în lume, dar, pentru a fi mai preciși, trebuie să folosim informații mai detaliate.

În articolul „Metode pentru măsurarea concentrării bogăției” (1905), economistul american Max Lorenz a propus să se ia în considerare așa-numitele *curbe Lorenz*, care descriu procentajele crescătoare ale bogăției deținute de procentaje crescătoare ale populației, pornind de jos: adică, cei care au mai puțin. Aceste curbe încep și se termină întotdeauna în același fel, deoarece 0% din populație deține întotdeauna 0% din bogăție, iar 100% o deține întotdeauna 100%. În rest, fiecare curbă diferă în funcție de regiunea geografică, de momentul istoric și de tipul de bogăție luat în considerare: de exemplu, dacă e vorba de avere sau venituri, și dacă acestea sunt brute sau nete.

Există două tipuri extreme de curbe Lorenz. În direcția egalității complete, există linia la 45 de grade care descrie distribuția perfect uniformă a bogăției: adică aceea în care nu numai 20% din populația mondială consumă 20% din resurse, ci fiecare procent al populației consumă procentul corespunzător de resurse. În direcția inegalității complete, există curba plată în care nimeni nu deține nimic, cu excepția unei persoane care deține totul și care face curba să urce la maximum în ultimul punct.

Curbele Lorenz concrete se află întotdeauna între aceste două extreme și măsoară în detaliu concentrația bogăției într-o anumită situație, dar o fac cu prețul unor informații infinite: una pentru fiecare valoare procentuală a populației. În articolul „Variabilitate și schimbare” (1912), statisticianul italian

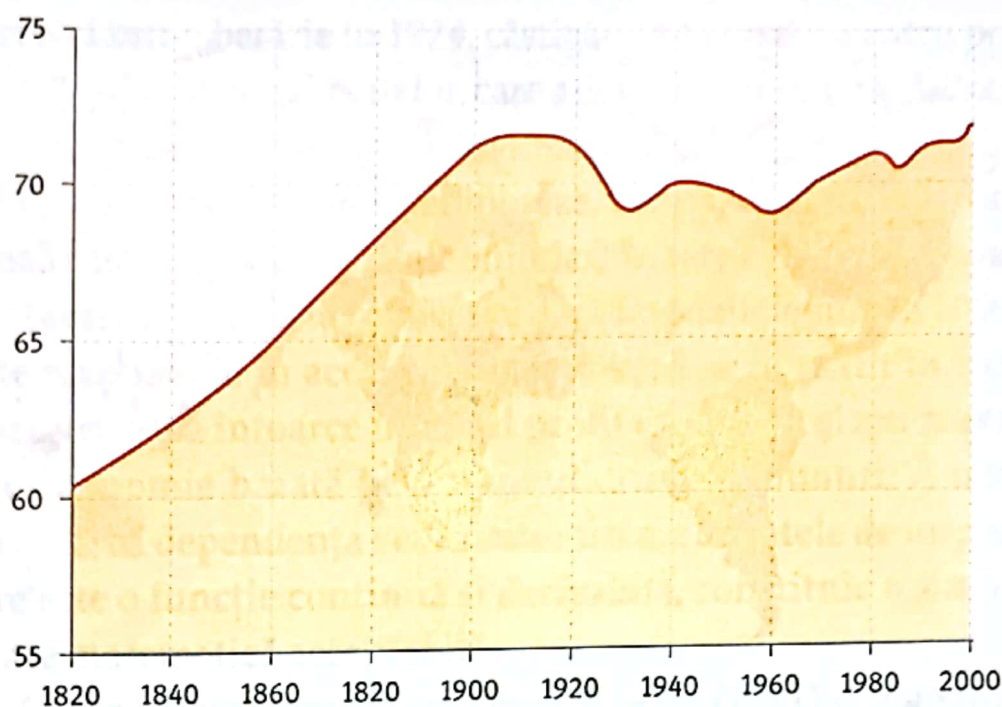


Coeficientul Gini este raportul dintre A și $A + B$.

Corrado Gini a propus să se extragă din fiecare curbă Lorenz o singură informație cumulativă: așa-numitul *coeficient Gini*, care se obține măsurând procentajul de suprafață cuprinsă între curba dată și cea la 45 de grade, raportat la suprafața cuprinsă între aceasta din urmă și curba plată.

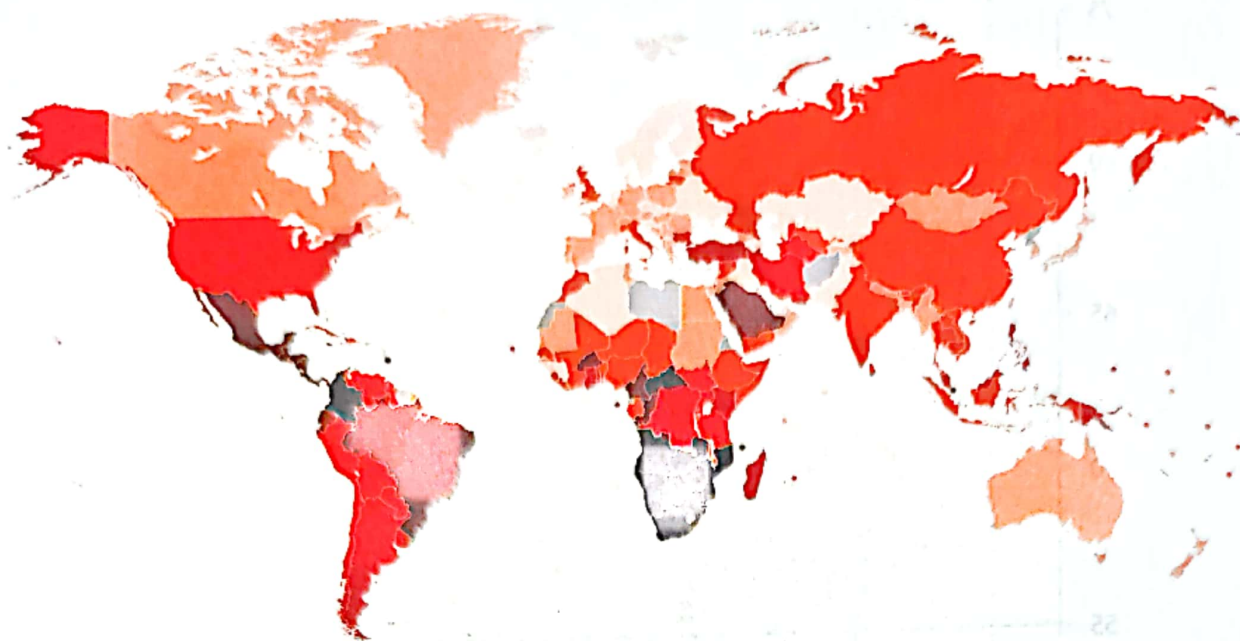
Fiind vorba despre un procentaj, coeficientul Gini e întotdeauna un număr cuprins între 0 și 1, iar pentru a-l exprima mai comod într-un interval de la 0 la 100, se poate înmulți cu 100. Și pentru că măsoară cât de mult se abate curba Lorenz corespunzătoare de la egalitatea completă în distribuția bogăției, cu cât este mai mare coeficientul, cu atât inegalitatea va fi mai mare, și invers.

Coeficientul Gini are avantajul de a reflecta distribuția bogăției într-un mod mai detaliat decât o fac indicatorii mai rudimentari, cum ar fi produsul intern brut al unei națiuni, care nu oferă nici o informație despre distribuție. Sau venitul pe cap de locuitor, care oferă doar una rudimentară: dacă o persoană mănâncă un pui și alta nu mănâncă nici unul, consumă în medie jumătate fiecare.



Ajunși aici, nu rămâne decât să punem în practică teoria și să examinăm câteva cazuri concrete. De exemplu, în întreaga lume, coeficientul Gini a crescut de la 43 la 72 în perioada dintre 1800 și 2000: astfel, în ultimele două secole, creșterea bogăției produse de revoluția industrială a accentuat foarte mult decalajul dintre bogați și săraci. Același efect s-a produs în Statele Unite, unde coeficientul a crescut de la 39 la 48 în perioada dintre 1970 și 2010, din cauza reducerii la jumătate a cotei maxime de impozitare. În Italia însă, creșterea presiunii fiscale a menținut aproape constant în perioada dintre 1980 și 2005 coeficientul venitului net între 31 și 34, în timp ce coeficientul venitului brut a crescut de la 42 la 56: adică, impozitele mari au acționat ca un factor de echilibru social al bogăției.

Uitându-ne la statele lumii, ne dăm seama că coeficientul Gini ne permite să le clasificăm în ordinea descrescătoare a democrației distributive. Coeficienții sunt minimi în țările scandinave și scăzuți în multe țări europene, Canada, Australia și Japonia. Cresc la valori medii spre joase în Italia, Anglia, Rusia, China și India, și la valori medii spre înalte în Turcia, Iran, Statele Unite și multe țări sud-americane, ajungând la



valori înalte în Brazilia, Mexic și Arabia Saudită. Valori maxime se ating în Republica Centrafricană și în Africa de Sud. Dovadă că bogăția și justiția socială nu sunt doar foarte diferite, ci și cuantificabile.

DOUĂ CURBE FRUMOASE

Curba lui Laffer și vârful lui Hubbert

E plauzibil că politicienii, ai căror coeficienți de inteligență sunt adesea reduși la minimum, iau decizii economice sau militare într-un mod pur instinctiv sau improvizat. În mod surprinzător însă, chiar și măsuri aparent nechibzuite, cum ar fi o reducere sălbatică a impozitelor sau folosirea brutală a zăcămintelor de petrol, au fost luate pe baza unor argumente matematice deloc lipsite de temeii.

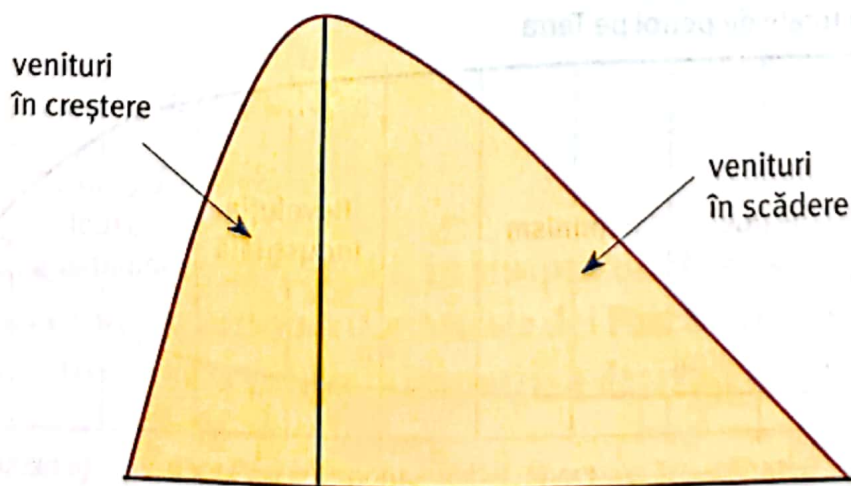
De exemplu, așa-numita *supply-side economics*, sau „economie orientată către ofertă”, care a constituit inițial credința lui Reagan și Thatcher, iar apoi a lui Bush II și Berlusconi, se baza pe *curba lui Laffer*, care leagă veniturile fiscale de ratele de impozitare. Se spune că economistul Arthur Laffer i-a schițat-o lui Reagan pe un

servețel într-o berărie în 1974, câștigându-l imediat pentru politica de reducere a impozitelor, care a devenit ulterior unul dintre punctele caracteristice ale *reaganomics*.

Curba se bazează pe trei ipoteze. Prima, că statul nu încasează nimic dacă impozitele sunt la 0%, este evidentă. A doua, că statul nu încasează nimic nici dacă impozitele sunt la 100%, este rezonabilă: în acest caz, ar fi absurd să fii plătit în bani doar pentru a întoarce întregul profit către stat, și am reveni la o economie bazată pe schimbul direct de bunuri. A treia ipoteză, că dependența veniturilor fiscale de ratele de impozitare este o funcție continuă și derivabilă, constituie o simplificare matematică acceptabilă.

Conform așa-numitei *teoreme a lui Rolle* (1691) din analiza matematică elementară, există apoi o rată de impozitare care produce venitul fiscal maxim: dacă impozitele depășesc acea rată, reducerea lor poate genera, așadar, o creștere a veniturilor fiscale! Trucul, desigur, constă tocmai în acel „dacă” și în acel „poate”: nimeni nu cunoaște, de fapt, forma exactă a curbei lui Laffer sau rata de impozitare care produce venitul fiscal maxim.

În ipoteza cea mai simplă, a unei curbe simetrice care-și atinge un singur maxim (de la care apoi coboară), rata de impozitare cea mai profitabilă ar fi 50%: atunci ar fi convenabil nu numai să se reducă ratele superioare, care de obicei nu sunt atinse deloc, ci și să se mărească cele inferioare, care sunt, în

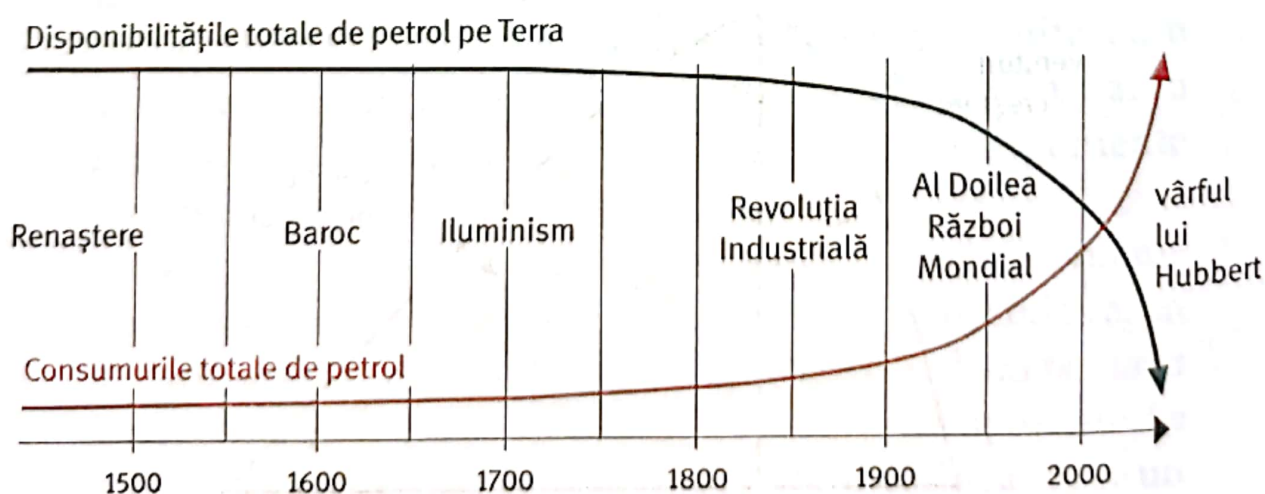


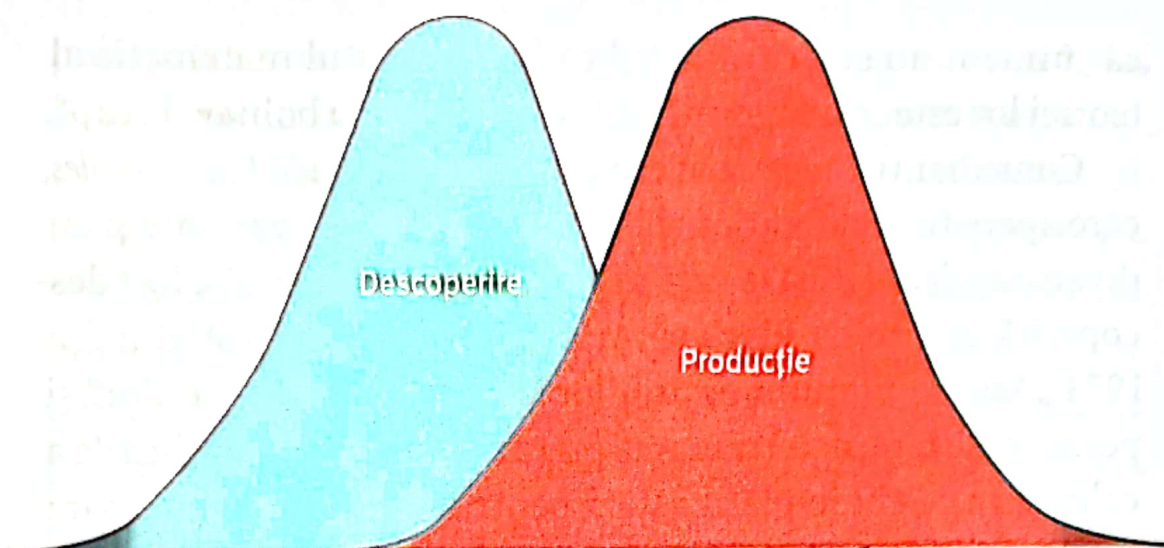
schimb, cele aplicate în mod obișnuit! Nu fără motiv, Bush I a etichetat *reaganomics* drept *voodoo economics* în 1980, când era candidat, și a fost apoi nevoit să repare daunele în calitate de președinte, reintroducând parțial în 1990 taxele reduse de Reagan.

Tot Bush I a inițiat, în 1990, cucerirea militară a Irakului, dusă apoi la îndeplinire de fiul său, Bush II, în 2003, pe baza unui alt argument matematic: prognoza atingerii iminente a punctului de intersecție între curba descendentă a rezervelor mondiale de petrol și curba ascendentă a consumului.

În cazul bunurilor regenerabile, intersectarea curbelor ofertei și cererii reprezintă echilibrul spre care ar trebui să tindă piața, ghidată de „mâna invizibilă” a *Bogăției națiunilor* (1776), titlul cărții lui Adam Smith. În cazul unui bun care nu se poate reface, precum petrolul, însă, punctul de intersecție dintre curbele de disponibilitate și cerere reprezintă momentul în care problemele energetice devin evidente.

Și de această dată, adevărata problemă este de a reuși să calculezi clipa întâlnirii fatale. În anii cincizeci, fizicianul King Hubbert a propus o legătură cu maximele (zise *vârful lui Hubbert*) a două curbe paralele: cea a descoperirii de zăcăminte petroliere și cea a exploatării lor. Ambele curbe au caracteristici asemănătoare curbei lui Laffer: pornesc de la zero când resursele sunt la maximumul disponibilității, revin la zero când se epuizează resursele, pot fi presupuse continue și derivabile între





aceste două puncte. Potrivit lui Hubbert, maximumul producției urmează la câțiva ani după maximumul descoperirii și precedă cu câțiva ani momentul crizei.

Spre deosebire de curba lui Laffer, există mai multe metode pentru extrapolarea evoluției curbei producției petrolifere. Bazându-se pe aceste metode, Hubbert a prezis în 1956 că, în Statele Unite, maximumul va fi atins în 1970: ceea ce s-a și întâmplat cu precizie și a fost urmat, conform previziunii, de prima criză a petrolului, în 1973. Azi, se crede că maximumul descoperirii de zăcăminte petrolifere a fost deja atins, iar cel al producției va surveni în acest deceniu, așa că vom fi curând *out of gas*, conform titlului unei cărți a lui David Goodstein¹, care descrie în amănunt diagnosticul și pronosticul maladii energetice mondiale.

UN REZULTAT CARE PRINDE

Formula Black-Scholes

În seara de 25 ianuarie 2013, în timpul unei scenete improvizate la adunarea acționarilor Monte dei Paschi di Siena, Beppe Grillo a tunat și- a fulgerat împotriva derivatelor, susținând

1. *Out of Gas: The End of the Age of Oil*, Norton, New York, 2004.

că „nimeni nu știe ce sunt“ și că fundamentul matematic al teoriei lor este „o anagramă de formule pentru bolnavi la cap“.

Comediantul avea ce-avea cu faimoasa formulă *Black-Scholes*, care apare în matematică și în știință în diverse variante și cu diverse aplicații. Cea la care se referea (sau poate nu) a fost descoperită de Fischer Black și Myron Scholes într-un studiu din 1973 „Asupra prețului opțiunilor și datoriilor companiilor“ și permite, de fapt, determinarea prețului unei opțiuni: adică de a calcula cât trebuie plătit astăzi pentru dreptul de a cumpăra (*call*) sau vinde (*put*) mâine un anumit bun la un preț prestabilit.

Acest tip de opțiuni nu este o noutate modernă, deși în ultimele decenii a devenit nucleul pieței derivate. Conform *Politicii* lui Aristotel, se pare că primul contract opțional a fost încheiat de Thales, când a prevăzut că recolta de măslina va fi deosebit de bogată și s-a asigurat în avans că va putea folosi teascurile la un anumit preț. La momentul potrivit, și-a exercitat opțiunea, iar apoi a vândut utilizarea teascurilor la un preț mai mare decât cel plătit, obținând profit din diferență. Și demonstrând astfel, potrivit lui Aristotel, utilitatea practică a filozofiei.

Înainte de rezultatul lui Black și Scholes era însă dificil să se calculeze prețul unei opțiuni. Privind retrospectiv, formula pe care au descoperit-o și care a scos la iveală piața derivatelor s-a dovedit a fi aceeași cu *ecuația căldurii*, descoperită de Joseph Fourier cu un secol și jumătate înainte: în timp ce a doua permite calcularea transmiterii temperaturii¹, prima permite, în mod analog, calculul transmiterii prețurilor. În ambele cazuri, ipotezele adecvate făcute pentru a demonstra cele două formule au legătură cu aleatoriul: al mișcării particulelor într-un mediu, în cazul lui Fourier, și al comportamentului prețurilor pe o piață, în cazul lui Black și Scholes.

O aplicare ulterioară surprinzătoare a aceleiași formule a fost sugerată de Richard Hamilton care, într-un articol despre „Su-

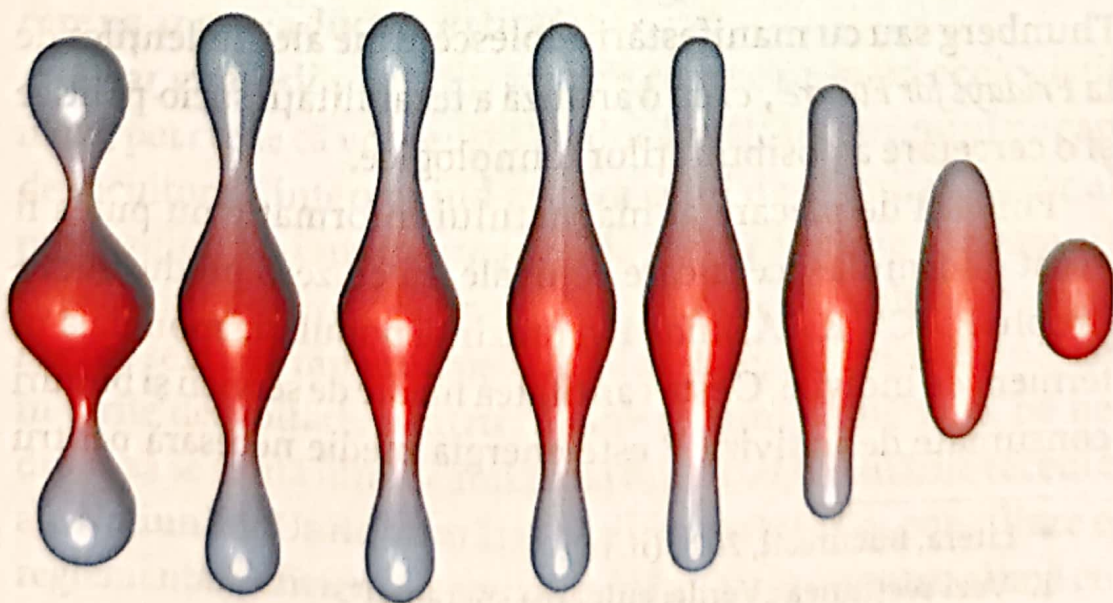
1. Vezi secțiunea „Semn distinctiv: cravata“.

prafețe tridimensionale cu curbura Ricci pozitivă”, din 1982, a introdus un instrument esențial: *fluxul Ricci*, numit astfel în onoarea italianului Gregorio Ricci-Curbastro, inventatorul calculului tensorial folosit de Einstein pentru relativitatea generală.

Fluxul supune suprafața unei transformări topologice care, la rândul ei, se supune unei ecuații asemănătoare cu cea a transmiterii căldurii: în acest caz, ceea ce se transmite uniform nu e temperatura, ci curbura medie măsurată de așa-numitul *tensor Ricci*. Hamilton a conchis că fluxul ar păstra neschimbate cele opt geometrii introduse în anii '70 de William Thurston. Și că efectul său final ar fi să transforme topologic orice porțiune generică a unei suprafețe într-una având una dintre aceste geometrii.

În notele despre „Timpul de extincție finit pentru soluțiile fluxului Ricci pe anumite suprafețe tridimensionale” (2003), Grigori Perelman a rezolvat și faimoasa *conjectură a lui Poincaré*, arătând că fluxul Ricci transformă într-o hipsferă orice suprafață pe care toate curbele închise se pot contracta continuu la un punct.

Cu aceleași metode, Perelman a finalizat programul lui Hamilton și a demonstrat *conjectura lui Thurston*, care caracterizează complet suprafețele tridimensionale, împărțindu-le în



bucăți generice și atribuind fiecareia dintre ele una dintre cele opt geometrii posibile.

Pentru cei care nu știu, Thales era considerat unul dintre cei șapte înțelepți ai Antichității. Numele lui Fourier este pomenit zilnic în întreaga lume, datorită seriilor și transformărilor introduse de el pentru studiul ecuației căldurii. Scholes a primit Premiul Nobel pentru economie în 1997 (singur, deoarece Black murise doi ani înainte). Iar Perelman a primit în 2006 Medalia Fields și în 2010 unul dintre Premiile Mileniului în valoare de un milion de dolari de la Institutul Clay (refuzând ambele recunoașteri). Așa că în povestea asta, după cum poate vedea oricine, erau multe genii, singurul „bolnav la cap” fiind sărmanul Beppe Grillo.

ECONOMIA VERDE

Formula lui Bill Gates

Cartea lui Bill Gates *Cum să evităm un dezastru climatic. Soluțiile la îndemână și inovațiile necesare** (2021) abordează problemele mediului planetar într-un mod matur și rațional. Mai exact, nu cu slogane infantile precum cele ale influencerului Greta Thunberg sau cu manifestări adolescente ale studenților de la *Fridays for Future*¹, ci cu o analiză a fezabilității socio-politice și o cercetare a posibilităților tehnologice.

Punctul de plecare al magnatului informatic nu putea fi decât o formulă: aceea care echivalează cu zero produsul cva-druplu $P \times C \times E \times A$, unde P reprezintă populația mondială în termeni de indivizi, C este cantitatea medie de servicii și bunuri consumate de indivizi, E este energia medie necesară pentru

* Litera, București, 2021 (n. tr.).

1. Vezi secțiunea „Verde: culoarea speranței”.

producerea serviciilor, iar A este cantitatea medie de dioxid de carbon eliberată în urma producției de energie.

Produsul menționat este egalat cu zero deoarece comunitatea științifică cere de ceva timp o reducere cu 50% a emisiilor de dioxid de carbon până în 2030 și cu 80% până în 2050, astfel încât să ajungă la zero până în 2100. Motivul pentru care obiectivul nu poate fi doar o reducere, oricât de substanțială ar fi, este că CO₂ rămâne în atmosferă o perioadă lungă de timp după ce este produs: chiar și dacă l-am elimina complet astăzi, temperatura globală nu ar scădea decât peste câteva decenii.

Până și copiii (cărora, în paranteză fie spus, le era inițial adresată formula lui Bill Gates) știu că un produs se anulează doar atunci când cel puțin unul dintre factori e nul. Reducerea populației umane P la zero ar fi efectiv o soluție radicală a problemelor climatice (și nu numai) ale planetei noastre. E însă iluzoriu să ne închipuim că epidemiile, foametea și războaiele vor face acest lucru: în secolul XX, gripa spaniolă și SIDA au ucis aproximativ 100 de milioane de oameni, iar cele două războaie mondiale au făcut același lucru, având în vedere o populație mondială care numără acum opt miliarde de oameni și este în continuă creștere. Paradoxal, doar negaționiștii climatici ar putea avea o șansă serioasă de a distruge întreaga omenire, dacă ar reuși să împiedice oprirea și inversarea schimbărilor climatice care ne-ar putea duce la extincție.

Doar visătorii și sfinții, printre care se numără ecologiștii naivi, pot crede că vor reuși să reducă radical consumul pe cap de locuitor C, intervenind asupra celui de-al doilea factor al produsului. Mai mult, prognozele arată că aceste consumuri vor continua să crească: în țările în curs de dezvoltare, pentru că cine se simte rău vrea, pe bună dreptate, să se simtă bine, iar în țările dezvoltate, pentru că cine se simte bine vrea, pe nedrept, să se simtă întotdeauna mai bine. Dar simulările recente ale Națiunilor Unite au arătat că e imposibil să se concilieze o reglementare eficientă a emisiilor dăunătoare pentru climă cu

obiectivul unei creșteri continue minime de 2–3% a produsului intern brut anual, care e una dintre poruncile sistemului economic occidental.¹

Oamenii cu scaun la cap și implicați, printre care se numără ecologiștii maturi, sunt dispuși să facă eforturi considerabile pentru a limita energia în orice fel: să meargă pe jos, cu bicicleta sau cu mijloace de transport în comun, să folosească becuri cu consum redus și mașini hibride sau electrice, să se deplaseze cu barca cu vele în loc de avion, să controleze temperatura și să îmbunătățească izolarea locuințelor, să instaleze panouri solare și să cumpere produse locale, să recicleze etc. Toate aceste lucruri liniștesc conștiința, dar nu vor împiedica lumea să-și mărească consumul de energie cu 50% până în 2050 față de astăzi, conform simulărilor menționate.

Singura soluție viabilă și rațională, conform lui Bill Gates, e să găsim noi tehnologii pentru a produce energie fără emisii de dioxid de carbon. Hidroenergia, energia eoliană și cea solară pot aduce contribuții și trebuie încurajate și răspândite, dar par să poată produce doar o mică fracțiune din energia necesară: cel puțin, pentru că nu întotdeauna și nu peste tot strălucește soarele sau bate vântul. Paradoxal, ar putea să nu rămână altă opțiune decât energia nucleară curată și sigură, cum ar fi cea din reactoarele cu unde călătoare (*travelling wave reactors*), care ar rezolva și problema deșeurilor radioactive deja existente. Oare, pentru a aborda cu adevărat problema climatică, va trebui în cele din urmă să conciliem diavolul tehnologic și agheasma ecologică?

Dacă vom trăi, vom vedea. Deocamdată, ne oprim aici.

1. Idem.

Premii Nobel și Medalii Fields citate

An	Nume	Premiu	Materia
1903	Arrhenius	Nobel	chimie
1921	Einstein	Nobel	fizică
1922	Bohr (Niels)	Nobel	fizică
1929	Mann	Nobel	literatură
1932	Langmuir	Nobel	chimie
1933	Morgan	Nobel	medicina
1938	Fermi	Nobel	fizică
1944	Rabi	Nobel	fizică
1950	Russell	Nobel	literatură
1958	Thom	Fields	matematică
1960	Libby	Nobel	chimie
1962	Landau	Nobel	fizică
1962	Crick și Watson	Nobel	medicina
1965	Feynman, Schwinger și Tomonaga	Nobel	fizică
1966	Atiyah	Fields	matematică
1968	Kawabata	Nobel	literatură
1972	Arrow	Nobel	economie
1975	Bohr (Aage)	Nobel	fizică
1975	Kantorovich	Nobel	economie
1979	Glashow, Salam și Weinberg	Nobel	fizică
1981	Hoffmann	Nobel	chimie

An	Nume	Premiu	Materia
1982	García Márquez	Nobel	literatură
1982	Connes și Thurston	Fields	matematică
1986	Donaldson	Fields	matematică
1989	Ramsey	Nobel	fizică
1990	Witten	Fields	matematică
1994	Harsanyi, Nash și Selten	Nobel	economie
1995	Crutzen, Molina și Rowland	Nobel	chimie
1995	Movimento Pugwash	Nobel	pace
1996	Curl, Kroto și Smalley	Nobel	chimie
1997	Scholes	Nobel	economie
1998	Gowers, Kontsevich și McMullen	Fields	matematică
1998	Sen	Nobel	economie
2001	Cornell, Ketterle și Wieman	Nobel	fizică
2004	Atiyah	Abel	matematică
2004	Gross, Politzer și Wilczek	Nobel	fizică
2006	Perel'man și Tao	Fields	matematică
2007	Gore și IPCC	Nobel	pace
2010	Villani	Fields	matematică
2010	Geim și Novosëlov	Nobel	fizică
2011	Schechtman	Nobel	chimie
2014	Bhargava și Mirzakhani	Fields	matematică
2015	Nash	Abel	matematică
2017	Thorne	Nobel	fizică
2018	Figalli	Fields	matematică
2020	Penrose	Nobel	fizică

În colecția **Știință** au mai apărut

- Viorica Marian, *Puterea limbajului: Cum ne transformă mintea codurile pe care le folosim pentru a gândi, a vorbi și a trăi*
- John Parrington, *Conștiința: Cum dă naștere materia gândirii*
- Johnjoe McFadden, *Viața e simplă: Despre cum briciul lui Occam a eliberat știința și a dezvăluit universul*
- Lee McIntyre, *Cum să discuți cu un negaționist al științei: De ce cred unii că Pământul e plat și alte teorii ale conspirației*
- Lee Smolin, *Revoluția neterminată a lui Einstein: Căutarea a ceea ce se află dincolo de cuante*
- Brian Cox, Jeff Forshaw, *De ce $E = mc^2$? (Și de ce e important s-o știm?)*
- Carlo Rovelli, *Anaximandru din Milet sau nașterea gândirii științifice*
- Philipp Dettmer, *Imun*
- Meghan O'Gieblyn, *Dumnezeu, om, animal, mașină: Tehnologie, metaforă și căutarea sensului*
- Victoria Shepherd, *O istorie a delirului: Regele de sticlă, soțul înlocuit și cadavrul umblător*
- Cătălin Vasilescu, *Bestiar: Șapte povestiri cu chirurghi și scandaloasele lor operații*
- Alexandru Babeș, *Durerea: Istoria conviețuirii cu un vechi dușman*
- Manfred Spitzer, *Singurătatea: Boala nerecunoscută*
- Johnjoe McFadden, Jim Al-Khalili, *Viața la limită: Maturizarea biologiei cuantice*
- Leonard Mlodinow, *Stephen Hawking: Amintiri despre prietenie și fizică*
- Răzvan Rughiniș, *Societatea digitală: Stăpâni, cetățeni sau sclavi?*
- Marcus Chown, *Magicienii: Minți geniale și miracolul central al științei*
- Brian Greene, *Până la sfârșitul timpului*
- Mircea Flonta, *Filozofia cercetătorului: Înțelegerea fizicii cuantelor la Niels Bohr și Werner Heisenberg*
- Richard Dawkins, Yan Wong, *Povestea strămoșilor noștri: Pelerinaj la începuturile vieții*
- Mihai G. Netea, *O istorie genetică (incompletă) a românilor*
- Sverker Johansson, *Zorii limbajului*
- Mario Livio, *De ce? Ce ne stârnește curiozitatea*
- Gaia Vince, *Focul, limbajul, frumusețea, timpul: Cum au depășit oamenii legile frești ale evoluției*
- Jim Al-Khalili, *Ce ne spune fizica despre lume*

Michael White, John Gribbin, Stephen Hawking: *O viață dedicată științei*
 Robert Levine, *Geografia timpului: De ce timpul nu se măsoară la fel în toate culturile*
 Carlo Rovelli, *Și dacă timpul n-ar exista?*
 Antonio Damasio, *Strania ordine a lucrurilor: Viața, sentimentele și nașterea culturilor*
 Pier Vincenzo Piazza, *Homo biologicus: Cum explică biologia natura umană*
 Paul Davies, *Rețelele de informație și misterul vieții*
 John D. Barrow, *1+1 nu face (întotdeauna) 2: O lecție de matematică*
 Paul Nurse, *Ce este viața? Cinci mari idei ale biologiei*
 Noreena Hertz, *Secolul singurătății: O pledoarie pentru relațiile interumane*
 Frank Wilczek, *Fundamentele lumii fizice*
 Alexandru Babeș, *Povestea creierului: În căutarea celui mai complicat obiect din univers*
 Jim Baggott, *Masa: Încercarea de a înțelege materia, de la atomii grecilor la câmpurile cuantice*
 Alexandru N. Stermin, *Călătorie în jurul omului*
 William H. Calvin, *O scurtă istorie a minții: De la maimuțele antropoide la intelect și mai departe*
 Marco Andreatta, *Forma lucrurilor: Alfabetul geometriei*
 Jim Al-Khalili, *Găuri negre, găuri de vierme și călătoria în timp*
 Alexis Willett, Jennifer Barnett, *De cât de mult creier avem cu adevărat nevoie? Metoda infailibilă ca să-ți folosești 100% inteligența*
 David Whitehouse, *Călătorie spre centrul Pământului: Extraordinara expediție de explorare științifică în adâncurile lumii noastre*
 Carlo Rovelli, *Helgoland: Cum să înțelegem teoria cuantică*
 Michael Graziano, *Conștiința dintr-o nouă perspectivă: O teorie științifică a experienței subiective*
 Stephen Hawking, *Răspunsuri scurte la marile întrebări*
 Adrian Bejan, *Fizica vieții: Evoluția pretutindeni*
 David Eagleman, Anthony Brandt, *Specia rebelă: Despre creativitatea oamenilor și despre modul în care ea schimbă lumea*
 Frans de Waal, *Mama. Ultima îmbrățișare: Ce ne spun emoțiile animalelor despre noi înșine*
 Jim Al-Khalili (ed.), *Extratereștrii: Ce ne spune știința despre viața în univers*
 Alexandru Toma Pătrașcu, *Povestiri despre epidemii și vaccinuri*
 Oliver Sacks, *Fluviul conștiinței*
 Sabine Hossenfelder, *Rătăciți printre formule: Cum îi derutează frumusețea pe fizicieni*

SERIA ȘTIINȚĂ

este coordonată de Vlad Zografi

Alte cărți de știință la
Humanitas:

PAOLO ZELLINI

*Matematica zellor și algoritmi
oamenilor*

JIM AL-KHALILI

Bucuria științei

CARLO ROVELLI

*Anaximandru din Milei
sau nașterea gândirii științifice*

JOHNJOE McFADDEN

*Viața e simplă.
Despre cum briciul lui Occam a eliberat
știința și a dezvăluit universul*

SEAN CARROLL

*Ceva profund ascuns.
Lumile cuantice și emergența
spațiului-timp*

CHARLES SEIFE

*Hawking.
Cum să devii celebru în lumea științei*

JEREMY BERNSTEIN

*Oppenheimer.
Portretul unei enigme*

Pe copertă: Leonardo da Vinci,
ilustrații pentru Luca Pacioli,
Proporția divină, 1509

Se spune că matematicienii vorbesc numai cu Dumnezeu.
Dar nu este și cazul lui Piergiorgio Odifreddi, un matematician care știe de minune să se adreseze cititorului profan.

—LA STAMPA

Dacă sănătatea fizică poate fi menținută cu un medicament administrat zilnic, Piergiorgio Odifreddi ne propune *Pilule matematice* drept tratament preventiv pentru sănătatea minților noastre puse tot mai greu la încercare de iraționalitate și analfabetism științific.

Stăpânind o vastă cultură, cu talent de povestitor, multă imaginație și ironie fină, Odifreddi ne dezvăluie legăturile matematicii nu doar cu științele naturii, evidente pentru fizicieni, chimiști sau biologi, dar și cele, adesea subtile, cu literatura, pictura, muzica, jocurile, economia, politica și filozofia. În ultimă instanță, *Pilule matematice* e un îndemn de a ne dezvolta perspicacitatea, de a privi cu atenție și curiozitate lumea în care trăim.

